ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (37)**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Παρασκευή, 31/5/2019**
8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\left(6x^2+\eta\mu x+\frac{4}{x}-2\right)dx$.

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, με $P(A')=\frac{3}{4}$ και $P(B)=\frac{2}{3}$.

   Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, να βρείτε τις πιθανότητες :

   (α) $P(A\cup B)$.

   (β) $P(A-B)$.

3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{\psi^2}{9}=1$, με εστίες Ε και Ε΄.

   (α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

   (β) Αν $T(x_1,\psi_1)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης, να αποδείξετε ότι :

$$(TE')-(TE)=\frac{8}{5}x_1 .$$

4. (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τύπο $f(\chi)=e^{\chi}$, $\chi\in\mathbb{R}$ και των ευθειών $\chi=1$ και $\psi=1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου, γύρω από την ευθεία $\psi=1$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi+1$. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται για την συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi\in(0,2)$, που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

6. Να αναλύσετε το κλάσμα $\dfrac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων και να υπολογίσετε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$.

7. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi=\eta\mu\theta$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}}d\chi$.

8. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(\chi)=\chi+\dfrac{\ln\chi}{\chi+1}$.

9. (α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί 9 - ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.

(β) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν όλα τα 2 σε συνεχόμενες θέσεις.

(γ) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν τα ψηφία 1, 1, 3 σε άρτιες θέσεις (δηλαδή στην 2^{η}, 4^{η}, 6^{η}, 8^{η} θέση).

1^{η} θέση	2^{η} θέση	3^{η} θέση	4^{η} θέση	5^{η} θέση	6^{η} θέση	7^{η} θέση	8^{η} θέση	9^{η} θέση

9 –ψήφιος αριθμός

10. (α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνάρτηση, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f'(\chi)>0$, $\chi\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση, $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(\chi)=\ln\left(e^{\chi}+\dfrac{\chi^3}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄ **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(\chi)=\dfrac{6\chi}{\chi^2+\chi+1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Για τη μετάβασή τους στο σχολείο, 120 μαθητές χρησιμοποιούν λεωφορείο, 60 μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί για τη μετάβασή του στο σχολείο λεωφορείο, η πιθανότητα να καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο είναι $\frac{1}{3}$, αν χρησιμοποιεί αυτοκίνητο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{4}$, ενώ αν πηγαίνει με τα πόδια, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{8}$. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή του σχολείου.
   (α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο.
   (β) Αν ο μαθητής που επιλέξαμε καθυστέρησε το πρωί να έλθει στο σχολείο, να βρείτε την πιθανότητα να ήλθε στο σχολείο με λεωφορείο.

3. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (κ), ο οποίος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων Οχ και Οψ και το σημείο επαφής του με τον θετικό ημιάξονα Οχ είναι το σημείο Α(2,0).

(β) Αν ο πιο πάνω κύκλος (κ) έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi-4\psi+4=0$, να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (κ), σε τυχαίο σημείο του $T(2+2\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2+2\eta\mu\theta)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=2\sigma\upsilon\nu\theta+2\eta\mu\theta+2$.

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων $\chi'\chi$ στο σημείο Β και η ευθεία ΤΑ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $\psi'\psi$ στο σημείο Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

4. Δίνεται η συνάρτηση g, με τύπο $g(\chi)=e^{-\chi}$, $\chi\in\mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη κυρτότητα.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0,g(0))$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-\chi}\geq 1-\chi$, $\chi\in\mathbb{R}$.

5. (α) Να αποδείξετε ότι: $(\tau o\xi\varepsilon\varphi\chi)'=\frac{1}{1+\chi^2}$, $\chi\in\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(\chi)=\tau o\xi\varepsilon\varphi(\chi^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(\chi)\geq 0$, $\chi\in\mathbb{R}$.

(γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\alpha]$, $\alpha>0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi^2=u$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\alpha}\chi^3 g(\chi^2)d\chi=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}\chi g(\chi)d\chi$.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(\chi)=\chi^3\tau o\xi\varepsilon\varphi(\chi^2)$, τον άξονα των τετμημένων $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=1$.

------ Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \quad \acute{\eta} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$

$$\acute{o}\pi o \upsilon \ \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\,\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \qquad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\,\eta\mu\frac{B-A}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^o\kappa + \alpha$ ή $x = 360^o\kappa + 180^o - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^o\kappa \pm \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = 180^o\,\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E\pi = \Pi_\beta . \upsilon$	$V = E_\beta . \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$	$V = \pi R^2\upsilon$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες ($\pm$ γ,0), Διευθετούσες $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \qquad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c \qquad \int \sigma\tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K.E.X}{100}$$