

### Βασικές έννοιες και ορισμοί

▪ Μια ουνίθια διαφορική έξιωση είναι ότιο έξιωσης της μορφής

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

που συνδέει την αναζητούμενη μεταβλητή  $x$ , την άγνωστη συνάρτηση  $y=y(x)$  και τις παραγόμενες ουνίθιες  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ .

▷ Tόξη της ΣΔΕ Τίχυροι ή βγαλμένη σύζητη παραγόμενη της άγνωστης συνάρτησης, που εφερίχεται στη ΣΔΕ.

▷ Αν  $n$  ΣΔΕ είναι πολυώνυμο ως προς την  $y(x)$  και τις παραγόμενες της, τότε Τίχυροι πολυωνυμική ΣΔΕ είναι η δύναμη στην οποία είναι υψηλότερη την  $y^{(n)}$  Τίχυρα θατήδας.

□ Αν  $n$  ΣΔΕ είναι γραμμική συνάρτηση ως προς την  $y(x)$  και τις παραγόμενες της, τότε Τίχυρα γραμμική ΣΔΕ.

Η μορφή της γραμμικής ΣΔΕ  $n$ -οντος σύζητης είναι:

$$a_{n-1}(x) y^{(n)}(x) + a_{n-2}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = g(x) \quad (*)$$

όπου  $a_i(x), i=0, \dots, n$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  και διγραφεί συνεχώς της γραμμικής ΣΔΕ.

- Αν  $a_i(x) = a_i$  τότε τη  $(*)$  Τίχυρα γραμμική ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές

- Αν  $\exists i$ , οχι όντως  $a_i(x) \neq a_i$  τότε τη  $(*)$  Τίχυρα γραμμική ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές

> Αν  $g(x)=0$ , τότε τη  $(*)$  Τίχυρα γραμμική ΣΔΕ ορθής.

> Αν  $g(x) \neq 0$ , τότε τη  $(*)$  Τίχυρα γραμμική ΣΔΕ μη ορθής.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1)  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^3$

ΣΔΕ 2<sup>nd</sup> ροζns, πρώτου βαθμού  
γραφική με συσθίσεις αναλύσεις  
της συνάρτησης

2)  $y'(x) + y^4(x) = \sin x$

ΣΔΕ 1<sup>st</sup> ροζns, με γραφική  
πρώτου βαθμού

3)  $(2x-y)dx - dy = 0 \Leftrightarrow 2x-y = \frac{dy}{dx}$   
 $\Leftrightarrow y' + y = 2x$

ΣΔΕ 1<sup>st</sup> ροζns, γραφική  
συσθίσεις αναλύσεις, με συνάρτηση

4)  $x \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^4 + 2y = 2x \Leftrightarrow x(y'')^4 + 2y = 2x \quad \text{ΣΔΕ 2<sup>nd</sup> ροζns}$   
 $4^{\text{th}}$  βαθμού

5)  $x^2y'' - y' + 2y = 0$

ΣΔΕ 2<sup>nd</sup> ροζns, γραφική με με τη συσθίση  
αναλύσεων

□ Η ωριμή λύσης της ΣΔΕ ροζns n, που ικανοποιεί τις συσθίσεις:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad \text{καλείται } \underline{\text{πρόβλημα αρχικών σημάνων}} \quad (\text{ΠΑΤ})$$

Η ωριμή λύσης της ΣΔΕ, που ικανοποιεί συσθίσεις που αναφέρονται στα δύο υπόλοιπα σημεία [a, b], καλείται πρόβλημα αναφορικών σημάνων.

□ Γενική Λύση της ΣΔΕ, λέγεται με συνέργεια τη σύνολο τινα λύση της ΣΔΕ και τινα μορφής  $y = \varphi(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$  οπου  $c_i, i=1, \dots, n$  είναι αυθείριστες συσθίσεις.

□ Μια λύση που προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένα τινα των συσθίσεων  $c_1, c_2, \dots, c_n$  καλείται ειδική λύση.

□ Οποιοδήποτε συνάρτηση που αποδεικνύει λύση της συσθίσεως Γενικής λύσης ροζns n, αλλά δεν προκύπτει από τη γενική λύση για κάπια τινα ανιχνεύσιμα τινα των παρατίγματων  $c_1, c_2, \dots, c_n$  λέγεται τυχαία λύση.

# $\Sigma \Delta E$



## $a'$ Τάξης ( $y'$ )

1)  $x \cdot M \quad f(x)dx + f(y)dy = 0$

2) Ακρ. Διλ:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

3) Οδοκλ. παράγοντας -  $\frac{M}{N}$  Euler  $f(x,y)$

4) Γραφηματικός Έ.Σ.  $y'(x) + a(x)y(x) = g(x)$

5) Με συγκαρασώσαν

5.1 Ομογενής  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

5.2 Bernoulli:  $y'(x) + a(x)y(x) = g(x)y^n(x)$

5.3 Riccati  $y' = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)y(x) + \sigma_2(x)y^2(x)$

5.4  $y' = f(ax+by)$

5.5  $(a_1x+b_1y+c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)dy = 0$

## Ανωτέρης Τάξης

1) Ειδικής μεταβολής

1.1  $y^{(n)} = f(x)$

1.2  $F(x, y', y'') = 0$

1.3  $F(y, y', y'') = 0$

2) Ορθογενείς γραφηματικές βιώσεις

$$ay'' + by' + cy = 0$$

2.1 Με συαρτησας συντελεστές

2.2 Μιθόδος υπολογισμού τάξης (συαρτησας)

2.3 Εξισώσεις Euler  $x^2y'' + axy' + by = 0$

3) Με ορθογενείς γραφηματικές βιώσεις

3.1 Μιθόδος προστιμούσιας συντελεστών

3.2 Μιθόδος λινολατικής παρα-

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

# $\Sigma \Delta E$ πρώτης ροζης

## 1 ΣΔΕ χωρίζοντας τις αληθής

Μεθόδος ορθα

1ο = Εξωριζω  $x$  από  $y$

2ο = Μετά αλακινώνω (5)

$$f(x)dx \pm g(y)dy = 0$$

↓ ΓΛ

$$\int f(x)dx \pm \int g(y)dy = C$$

$\Sigma \Delta E$

$A'$

Παράδειγμα

$$\text{Να λύσει } n \text{ } \Sigma \Delta E : y - x y' = \frac{y}{x}$$

λύση:

1ο ΒΗΜΑ

$$y - x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$y - \frac{y}{x} = x \frac{dy}{dx}$$

$$y \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \frac{dy}{dx}$$

$$y \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x dy$$

$$\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{y} dy$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{y} dy$$

2ο ΒΗΜΑ

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{y} dy + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{y} dy + C$$

$$\ln|x| + \frac{1}{x} = \ln|y| + C$$

$$\ln|x| - \ln|y| = -\frac{1}{x} + C$$

$$\ln|\frac{x}{y}| = -\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{x}{y} = e^{-\frac{1}{x} + C} \Rightarrow y = \frac{x}{e^{-\frac{1}{x} + C}}$$

# Διαφορικές εξισώσεις χωρίς υπόληψη

## Μεθοδολογία

- 1ο: Είχωριζω  $x$  από  $y$   
2ο: Μετά ολοκληρώνω (S)

π.χ.  $y' = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$

~~1ο βήμα~~  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0, x \neq 0$

~~2ο βήμα~~  $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx + C$

$$\ln|y| = \ln|x| + C, \quad C = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x \cdot c|$$

$$y = x \cdot c$$

π.χ.  $y - x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned} 1ο: \quad y - \frac{y}{x} = x \cdot \frac{dy}{dx} &\Leftrightarrow y \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \frac{dy}{dx} \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{dy}{y}, \quad y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

$$2ο: \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{y} dy + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{y} dy + C$$

$$\ln|x| + \frac{1}{x} = \ln|y| + C$$

$$\ln|x| - \ln|y| = -\frac{1}{x} + C$$

$$\ln|\frac{x}{y}| = -\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{x}{y} = e^{-\frac{1}{x} + C} \Rightarrow y = \frac{x}{e^{-\frac{1}{x} + C}}$$

π.X-  
18

$$(x - y^2 x) dx - (y - x^2 y) dy = 0$$

$$x(1-y^2)dx - y(1-x^2)dy = 0$$

$$\frac{x}{1-x^2} dx - \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx - \int \frac{y}{1-y^2} dy = C$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2y}{1-y^2} dy = C$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + \frac{1}{2} \ln|1-y^2| = C$$

$$-\ln|1-x^2| + \ln|1-y^2| = 2C$$

$$\ln \left| \frac{1-y^2}{1-x^2} \right| = C$$

$$\frac{1-y^2}{1-x^2} = C$$

2

## Akribolis Diachorikis Integrals

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\text{Akribolis} \Leftrightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\text{Tot} \quad \int_{x_0}^x M(t,y)dt + \int N(x_0, y) dy = C \quad (*)$$

### Παράδειγμα

$$\text{Na ηύθυνη IDE} \quad 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = 0$$

Λύση:~~1<sup>o</sup> BHMA~~

Εξιγχω στην είναι ακριβής

$$M(x,y) = 2xy^3 \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{\partial(2xy^3)}{\partial y} = 6xy^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Από την ακριβής}$$

$$N(x,y) = 3x^2y^2 \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial x} = 6xy^2$$

~~2<sup>o</sup> BHMA~~

Χρησιμοποιώντας σχήμα (\*)

$$M(t,y) = 2ty^3$$

$$\int_0^x 2ty^3 dt + 50 dy = C$$

$$N(0,y) = 0 \quad (x_0=0)$$

$$\Rightarrow 2y^3 \int_0^x t dt = C$$

↓  
 (Μπορώ να βάλω ότι θέλω για  $x_0$   
 την αριθμητική αναλογία)

$$\Rightarrow 2y^3 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = C$$

$$\Rightarrow x^2 y^3 = C$$

3

### Ολοκληρωτικοί παρόχοντες

(Πολλαπλασιασμός Euler)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Αν  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ , τότε δεν είναι ορθός

Για να γίνει ορθός, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν  $f(x,y)$  (πολλαπλασιασμός Euler)

Στοιχείωση:  $\int f(x,y) M(x,y) dx + \int f(x,y) N(x,y) dy = 0$

Ο πολλαπλασμός Euler, προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} f &= f(x) \\ f(x) &= \frac{N_y - N_x}{M} \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow f(x) = e^{\int f(x) dx} \right.$$

$$\begin{aligned} f &= f(y) \\ f(y) &= \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{M_y - N_x}{-M} \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow f(y) = e^{\int f(y) dy} \right.$$

### Παράδειγμα

Να λυθεί η ΣΔΕ:  $\underbrace{2xy dx}_{\text{ΛΗΜΑ 1}} + \underbrace{(1-x^2-y^2) dy}_{\text{ΛΗΜΑ 2}} = 0$

BHMA 1<sup>ο</sup>  
Εξιγχυών  
είναι ορθός

Λήμα:

$$\begin{aligned} M(x,y) &= 2xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ N(x,y) &= 1-x^2-y^2 \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \end{aligned} \quad \text{Δεν είναι ορθός}$$

BHMA 2<sup>ο</sup>  
Αφού δεν είναι ορθός  
τότε πολλαπλασμός Euler

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

οπότε

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4x}{-2xy} = -\frac{2}{y} = f(y)$$

οπότε:  $f(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \int \frac{1}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$

BHMA 3<sup>ο</sup>

Πρώτη Συνάρτηση ΔΕ  
με πολλούς Euler

$$\left(\frac{1}{y^2}\right)(2xy)dx + \left(\frac{1}{y^2}\right)(3-x^2-y^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{y}dx + \left(\frac{1-x^2}{y^2} - 1\right)dy = 0$$

BHMA 4<sup>ο</sup>

Πρώτη Συνάρτηση ΔΕ πιο

ακριβές

Ακριβές από ακριβές

Εγγόνων συναρτήσεων

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{y}\right) = -\frac{2x}{y^2} > \text{Ακριβές}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1-x^2}{y^2} - 1\right) = -\frac{2x}{y^2}$$

$$M(t, y) = \frac{2t}{y}$$

$$\text{οπότε} \quad \int_1^x \frac{2t}{y} dt + \int -1 dy = C$$

$$N(1, y) = -1$$

$$\downarrow \\ x_0 = 1$$

Βαθύτερη σύναρτη από κυκλική  
παραδοσιακή

$$\left[\frac{t^2}{y}\right]_1^x - y = C$$

$$\frac{x^2}{y} - \frac{1}{y} - y = C$$

## Γραφικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + a(x)y(x) = B(x)$$

δρομής Έ.Λ.  
πρώτης ρεύματος

$$f(x) = e^{\int a(x)dx}$$

### Παράδειγμα

Να λυθεί το ΠΑΤ.  $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

οπού  $f(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

όπου στη δ.λ. γίνεται  $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x}$

γινόμενο πολυτέλειο  
στοιχείων  $(e^{2x}y)' = e^{2x}$

$$e^{2x}y = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$y = \frac{e^{2x}}{2e^{2x}} + \frac{C}{e^{2x}}$$

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

πλήρη λύση

όπου  $y(0) = 0$  οπού  $0 = \frac{1}{2} + Ce^{-2(0)}$

$$0 = \frac{1}{2} + Ce^0$$

$$0 = \frac{1}{2} + C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

Άρα  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

ειδική λύση

5

## Επίδειξη της αυτοκαράρεων

ΣΔΕ που δεν αντικαυμένης προσγεύτεις κοντρά, η οποία είναι παραχωριζόμενη σε λίγα από τις γνωστές αντικαυμένες λαθαίς.

### (5.1) Ομογενείς Εξιώνεις

#### Μεθόδοι Αναλογίας

1<sup>ο</sup> Αναλογικότερη είναι η ευαριθμούσις  $M(x,y), N(x,y)$  έτσι ώστε ομογενείς ως προς  $x$  και  $y$  του ίδιου βαθήσου ομογενειών.

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= t^n M(x, y) \quad \text{και} \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y) \quad \text{όπου } n \text{ θεωρείται} \\ &\quad \text{ομογενείς} \\ &\quad \therefore f(tx, ty) = t^n f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \text{Θίζουμε } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux & \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow y = ux \\ dy = xdu + udx \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Αυτή η ιδέα} \\ & \quad \text{είναι η ίδια με την } \Sigma ΔΕ \end{aligned}$$

3<sup>ο</sup> Η αναλογία είναι η ίδια με την ΣΔΕ των παραπάνω λαθαίων.

#### Παραδείγματα

$$(i) \quad (x \cdot e^{yx} + y) dx - x dy = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Λύση:} \quad M(tx, ty) &= tx e^{ty/tx} + ty = tx e^{yx} + ty = t(M(x, y)) = tM(x, y) \\ N(tx, ty) &= -tx = t(-x) = tN(x, y) \quad \text{ομογενείς} \\ & \quad \text{με } n=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux & \\ dy = xdu + udx & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \quad (x e^u + xu) dx - x(xdu + udx) &= 0 \Rightarrow (e^u + u) dx - xdu - udx = 0 \\ & \Rightarrow e^u dx - x du = 0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{x} dx = e^{-u} du \quad \text{X.M.} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int e^{-u} du + C$$

$$\ln|x| = -e^{-u} + C$$

$$(1) \quad (xy)dx + (x^2+y^2)dy = 0$$

Ajorn: 1º  $M(x,y) = xy \rightarrow M(tx,ty) = (tx)(ty) = t^2xy = t^2M(x,y)$   
 $N(x,y) = x^2+y^2 \rightarrow N(tx,ty) = (tx)^2+(ty)^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2N(x,y)$

oportuno, h<sub>o</sub> Q<sub>o</sub> theta oportuno n=2

2º  $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u$   
 $dy = xdu + udx$

3º  $x(xu)dx + (x^2+xu^2)(xdx+udx) = 0$   
 $x^2udx + x^2(1+u^2)(xdx+udx) = 0$   
 $udx + (1+u^2)xdx + \underline{(1+u^2)udx} = 0$   
 $u[(1+u^2)+1]dx + (1+u^2)xdu = 0$   
 $u(u^2+2)dx + (1+u^2)xdu = 0$   
 $\frac{1}{x} dx + \frac{1+u^2}{u(u^2+2)} du = 0 \quad x.M.$

5.2.

Διαφορική εξίσωση Bernoulli

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x) \quad \left\{ \begin{array}{ll} n=0 & \text{δραγμένη } \Sigma \Delta E \\ n=1 & \text{x. M.} \end{array} \right.$$

Μεθοδολογία1ο Παρατηρούμε ότι η  $\Sigma \Delta E$  με  $y^{-n}(x)$ 

$$y^{-n}(x) \cdot y'(x) + a(x) y^{-n+1}(x) = b(x)$$

2ο Εισαγαγούμε  $y^{-n+1}(x) = u(x)$  (\*)3ο Παρεβαγόμενη ως προς  $x$  η  $\Sigma \Delta E$  (\*)

$$\begin{aligned} \text{οπότε } (*) &\Rightarrow (-n+1) y^{-n+1-1}(x) \cdot y'(x) = u'(x) \\ &\Rightarrow (-n+1) y^{-n}(x) \cdot y'(x) = u'(x) \\ &\Rightarrow y^{-n}(x) \cdot y'(x) = \frac{u'(x)}{-n+1} \end{aligned}$$

4ο Αντικαθιστώμε  $\frac{u'(x)}{-n+1} + a(x)u(x) = b(x)$ 

$$\Rightarrow u'(x) + \underbrace{a(x)(-n+1)}_{\text{δραγμένη } \Sigma \Delta E} u(x) = b(x)$$

Ι. e. έχουμε

5ο Από την (\*) παίρνουμε το γεν. σύν. με αρχικής  $\Sigma \Delta E$

## Παραδειγμα

$$\text{Ηα } \lambda_0\text{ θελι } n \Sigma \Delta E : \quad y' - xy = x^3 y^3$$

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\circ} \quad y^{-3} y' - xy^{-2} = x^3 \\ 2^{\circ} \quad \text{Θιω } y^{-2}(x) = u(x) \\ 3^{\circ} \quad \text{Παραγωγή ως προς } x: \\ \qquad -2y^{-3}(x)y'(x) = u'(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4^{\circ} \\ \Rightarrow -\frac{u'(x)}{2} - xu(x) = x^3 \\ \Rightarrow u'(x) + \underline{2xu(x)} = -2x^3 \end{array}$$

Γραφική  $\Sigma \Delta E$  1<sup>ης</sup> ράξ

$$u(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

Οπότε  $e^{x^2} u'(x) + 2x e^{x^2} u(x) = -2x^3 e^{x^2}$

$$(e^{x^2} u(x))' = -2x^3 e^{x^2}$$

$$\int (e^{x^2} u(x))' dx = - \int 2x^3 e^{x^2} dx + C$$

$$e^{x^2} u(x) = - \int x^2 (2x e^{x^2}) dx + C$$

$$e^{x^2} u(x) = -x^2 e^{x^2} + \int 2x e^{x^2} dx + C$$

$$e^{x^2} u(x) = -x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C$$

$$u(x) = (-x^2 + 1) + C e^{-x^2}$$

5<sup>η</sup> αρά  $y^{-2}(x) = (1-x^2) + C e^{-x^2}$

5.3

### Διαχορική εξίσωση Riccati

$$y'(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x)y(x) + \sigma_2(x)y^2(x)$$

$\sigma_2(x)=0$  Γραφή κατ  
 $\sigma_0(x)=0$  Bernoulli

### Μεθοδολογία

 $y_1$  είναι γνωστό

1<sup>η</sup> πρόταση:  $y(x) = y_1(x) + u(x)$  ΣΔΕ Bernoulli

2<sup>η</sup> πρόταση:  $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$  Γραφή κατ. ως προς  $u(x)$

Παράδειγμα: Η α' λύθη ΣΔΕ:  $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$

Λύση:

Σ.ΔΕ Riccati

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + c^*$$

Θα είχει γνωρίσεις  $y_1(x) = ae^{bx}$

$$ab^2e^{bx} = a^2e^{2bx} - 2e^x ae^{bx} + e^{2x} + c^*$$

$$\Rightarrow ab^2e^{bx} = a^2e^{2bx} - 2ae^{(b+1)x} + e^{2x} + c^*$$

(1)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{εχει γνωρίσεις} \\ y_1(x) = bx + b \\ y_1(x) = \frac{a}{x^b} \\ y_1(x) = e^{ax} \quad \text{&} \quad y_1(x) = ae^{bx} \end{array} \right.$

πού  $b=1$   $ae^x = a^2e^{2x} - 2ae^{2x} + e^{2x} + c^*$

πού  $a=1$   $e^x = a^2e^{2x} - 2ae^{2x} + e^{2x} + c^*$   
οπότε  $y_1(x) = e^x$

Θέτουμε  $y(x) = e^x + \frac{1}{u(x)}$  (\*)

$$y'(x) = e^x - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$$y^2(x) = e^{2x} + \frac{1}{u^2(x)} + \frac{2e^x}{u(x)}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική ΣΔΕ

$$e^x - \frac{u'(x)}{u^2(x)} = e^{2x} + \frac{1}{u^2(x)} + \frac{2e^x}{u(x)} - 2e^x \left( e^x + \frac{1}{u(x)} \right) + e^{2x} + c^*$$

$$e^x - \frac{u'(x)}{u^2(x)} = e^{2x} + \frac{1}{u^2(x)} + \frac{2e^x}{u(x)} - 2e^{2x} - \frac{2e^x}{u(x)} + e^{2x} + e^x$$

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \frac{1}{u^2(x)}$$

$$u'(x) = -1$$

$$\int u'(x) dx = -\int 1 dx + C$$

$$u(x) = -x + C$$

onizzano (\*)

$$y(x) = e^x + \frac{1}{-x + C}$$

5.4

Διαφορική Σύνων  $y'(x) = f(ax+by)$ Μεθοδολογία

$$\text{Θίσουμε} \quad ax+by = z(x)$$

Παράτυχα  $\text{Να} \quad \text{ανθει} \quad \Sigma \Delta E : \quad y' = (y-x)^2$ Λύση

Θίσουμε

$$y - x = z(x)$$

$$y - 1 = z'(x)$$

$$y' = z'(x) + 1$$

(αντικαθιστώντας στη  $\Sigma \Delta E$ )

$$\text{οπότε} \quad z' + 1 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2-1} dz = dx \quad \underline{x.M.}$$

$$\int \frac{1}{z^2-1} dz = \int 1 dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z+1} = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln |z-1| - \frac{1}{2} \ln |z+1| = x + C$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2x + C$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = e^{2x+C}$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = e^{2x} e^C$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = C e^{2x}$$

(Αντικαθιστώντας τη σχέση)

$$\text{οπότε} \quad \frac{y-x-1}{y-x+1} = C e^{2x}$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{C e^{2x} + 1}{1 - C e^{2x}}$$

5.5

Εξισώσεις με πολυωνυμικούς πυρήνας & θετικούς

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \Rightarrow y'(x) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Μεθόδος λογία

Για πρώτη φορά Av  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \Rightarrow a_1 = ka_2$

$$y'(x) = f\left(\frac{ka_2x + kb_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$\text{Θέροψη } a_2x + b_2y(x) = z(x)$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 y'(x) = z'(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{z'(x) - a_2}{b_2}$$

Οπότε  $\frac{z'(x) - a_2}{b_2} = f\left(\frac{kz(x) + c_1}{z(x) + c_2}\right)$ , χωρίς σύνθετη μεταβολή

Για δεύτερη φορά Av  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{τιμούνται} \\ \text{στο} \\ (x_0, y_0) \end{array}$

$$\text{Θέροψη } \begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases} \Rightarrow y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial X}$$

$$a_1(x_0 + X) + b_1(y_0 + Y) + c_1 = a_1X + b_1Y$$

$$a_2(x_0 + X) + b_2(y_0 + Y) + c_2 = a_2X + b_2Y$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right), \text{ ofορίζεται ως προς } X \text{ και } Y$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λύθει η ΣΔΕ (i)  $y'(x) = \frac{x-2y+9}{3x-6y+19}$

$$y'(x) = \frac{x-2y+9}{3x-6y+19} \Rightarrow y'(x) = \frac{x-2y+9}{3(x-2y)+19}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } x - 2y(x) = z(x)$$

$$1 - 2y'(x) = z'(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{1 - z'(x)}{2}$$

$$\frac{1 - z'(x)}{2} = \frac{z(x) + 9}{3z(x) + 19} \Rightarrow 1 - z'(x) = \frac{9z + 18}{3z + 19}$$

$$\Rightarrow z'(x) = 1 - \frac{9z + 18}{3z + 19}$$

$$\Rightarrow z'(x) = \frac{3z + 19 - 9z - 18}{3z + 19} \Rightarrow z'(x) = \frac{-2z + 1}{3z + 19}, \text{ X.M.}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{-2z + 1}{3z + 19} \Rightarrow (3z + 19) dz = -2z + 1 dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{3z + 19}{-2z + 1} dz = \int dx + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{3z + 3 + 16}{-2z + 1} dz = x + C \Rightarrow \int \left[ 3 + \frac{16}{-2z + 1} \right] dz = x + C$$

$$\Rightarrow 3z + 16 \ln|-2z + 1| = x + C$$

$$\Rightarrow 3(x - 2y) + 16 \ln|x - 2y + 1| = x + C$$

$$\Rightarrow 3x - 6y + 16 \ln|x - 2y + 1| = x + C$$

$$\Rightarrow 2x - 6y + 16 \ln|x - 2y + 1| = C$$

$$2 = -1 \Rightarrow x - 2y = -1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

$$(ii) \quad y'(x) = \frac{x+2y+2}{y-2x+6}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4=5 \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=-2 \\ 9x+y=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) = (2,-2)$$

$$\text{Θετούμε } x=2+X, \quad y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$y=-2+Y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+x+2(-2+y)+2}{(-2+y)-2(2+x)+6} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{y-2x}$$

$$\Rightarrow (y-2x)dy = (x+2y)dx$$

$$\Rightarrow (x+2y)dx - (y-2x)dy = 0 \quad (*)$$

$$M(x,y) = x+2y$$

$$N(x,y) = -(y-2x)$$

$$M(tx,ty) = tx + 2ty = t(x+2y) = tM(x,y)$$

$$N(tx,ty) = -(ty-2tx) = t[-(y-2x)] = tN(x,y)$$

$$\frac{y(x)}{x} = u(x) \Rightarrow y = xu \Rightarrow dy = xdu + udx$$

Ανακαθίσσουμε στη ΣΔΕ (\*)

$$(x+2ux)dx - (xu-2x)(xdx + udx) = 0$$

$$(1+2u)dx - (u-2)(xdx + udx) = 0$$

$$\frac{2-u}{1+4u-u^2} \cdot du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2-u}{1+4u-u^2} du = -\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+4u-u^2| = -\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow (1+4u-u^2)x^2 = C$$

$$\Rightarrow \left(1+4\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)x^2 = C$$

$$\left( \begin{array}{l} x=2+X \\ y=-2+Y \end{array} \right) \quad (x-2)^2 + 4(x-2)(y+2) - (y+2)^2 = C$$

# ΣΔΕ ανώνυμης σειράς

## 1 Ειδικής Περιπτωσης

### 1.1 Διαφορικής εξισώσεων $y^{(n)} = f(x)$

Μεθόδος

Οροκληρώνοντας, προκύπτει η Γιαν (  $Sy^{(n)} + Sy'' \rightarrow Sy' \rightarrow y$  )

### Παράδειγμα

Να γνθή ως Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{1}{x^2} \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 2 \end{cases}$$

Λύση: Οροκληρώνοντας στη ΣΔΕ, έχουμε

$$y'(x) = \int \frac{1}{x^2} dx + C_1$$

$$y'(x) = -\frac{1}{x} + C_1$$

Εφόσον ισχύει  $y'(2) = 2$

$$-\frac{1}{2} + C_1 = 2$$

$$C_1 = \frac{5}{2}$$

οπότε  $y'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

Οροκληρώνοντας στη ΣΔΕ ακόμη ήταν ψορά, προκύπτει:

$$y(x) = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{5}{2} dx + C_2$$

$$y(x) = -\ln x + \frac{5}{2}x + C_2$$

Εφόσον ισχύει  $y(2) = 0$

$$-\ln 2 + \frac{5}{2} \cdot 2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = \ln 2 - 5 \quad \text{οπότε η Γιαν ζου ΠΑΤ λίγοι}$$

$$y(x) = \ln \frac{2}{x} + \frac{5}{2}x - 5$$

1.2 Διαφορική έξιωση  $F(x, y', y'') = 0$  (Clairaut)

### Μεθόδος Δοχεία

Για την υπόλοιπη τους αριθμούς  $y'$  και  $y''$  μεταβλητών

$$z = y'$$

Οποτε  $F(x, z, z') = 0$  ήταν διαφορική έξιωση πρώτης ρεζίνας

### Παράδειγμα

Να λύθει η ΣΔΕ:  $y'' = 1 + (y')$

Λύση: Θίσω  $z = y'$ , οποτε και  $z' = y''$

$$z' = 1 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{1+z^2} = 1$$

### Ορυκληρώνωντας ίχων

$$\arctan z = x + c_1$$

$$\Rightarrow z = \tan(x + c_1)$$

οπότε

$$y' = \tan(x + c_1) = \frac{\sin(x + c_1)}{\cos(x + c_1)}$$

### Ορυκληρώνωντας ορθών ήταν ψηφά

$$\int (y') dx = \int \frac{\sin(x + c_1)}{\cos(x + c_1)} + c_2$$

$$y(x) = \int -\frac{[\cos(x + c_1)]'}{\cos(x + c_1)} + c_2$$

$$y(x) = -\ln |\cos(x + c_1)| + c_2$$

1.3

### Διαφορική Σχέσης $F(y, y', y'') = 0$

#### Μεθοδολογία

Περεπλοκή είναι η αντίστοιχη περιπόλυτη και σύντομη.

Θέσης άπως πρώτη:  $z = y'$

όπους σε αυτή την πρώτην σχετίζουμε την  $y''$ , για

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$y'' = z \frac{dz}{dy}$$

οπότε

$$F(y, z, z \frac{dz}{dy}) = 0$$

#### Παράδειγμα

Να λύθει η ΕΔΕ:  $y'' + y = 0$

Λύση: Θέση  $z = y'$ , οπότε και  $y'' = z \frac{dz}{dy}$

$$\text{όποια } z \frac{dz}{dy} + y = 0$$

$$z \frac{dz}{dy} = -y$$

$$z dz = -y dy \quad (\text{x.M.})$$

Ολοκληρώσουμε

$$\int z dz = - \int y dy + C_1$$

$$\frac{1}{2} z^2 = - \frac{1}{2} y^2 + C_1$$

$$z^2 = -y^2 + C_2$$

$$z = \pm \sqrt{-y^2 + C_2}$$

$$\text{οπότε } y' = \pm \sqrt{-y^2 + C_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-y^2 + C_2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_2 - y^2}} = \pm dx \quad (\text{x.M.})$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{C_2}}\right) = \pm x + C_3$$

$$y(x) = \pm \sin(x + C)$$

$$\text{και ως 2<sup>nd</sup> : } y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

2

## Ολοκλήρωτης σχετικής έλιωσης

### 2.1 Με συαθρόπιο συνδιώσις

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0, \quad \text{οι συαθρόπιοι } i=0, \dots, n-1$$

#### Μεθοδολογία

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

Σταύρωση με την μέθοδο  
 $y(x) = e^{rx}$   
 $y'(x) = re^{rx}$   
 $y''(x) = r^2e^{rx}$

ΟΠΟΙΣΣΕΙΣ  
 $r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0$

$$e^{rx}(r^2 + a_1r + a_0) = 0$$

\*  $\boxed{r^2 + a_1r + a_0 = 0}$  (\*)  $\rightarrow$  χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Τετριγωνώσις: (i)  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  θέμεις του χαροκ. πολυωνυμίου (\*)

αν  $\boxed{r_1 \neq r_2} \Rightarrow e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$  γρ. ουλής θέμεις, όπε  
 $(\Delta > 0)$

$$y_0(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(ii)  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  θέμεις του χαροκ. πολυωνυμίου (\*)

αν  $\boxed{r_1 = r_2 = r} \Rightarrow e^{rx}, xe^{rx}$  γρ. ουλής θέμεις, όπε  
 $(\Delta = 0)$

$$y_0(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

(iii)  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  θέμεις του χαροκ. πολυωνυμίου (\*)

αν  $\boxed{\begin{aligned} r_1 &= k+i\lambda \\ r_2 &= k-i\lambda \end{aligned}} \quad (\lambda \neq 0) \Rightarrow e^{kx} \cos(\lambda x), e^{kx} \sin(\lambda x)$  θέμεις, όπε  
 $(\Delta < 0)$

$$y_0(x) = C_1 e^{kx} \cos(\lambda x) + C_2 e^{kx} \sin(\lambda x)$$

## Паројнија

Најузејији су  $\Sigma \Delta E$ : (i)  $y'' + 4y' + 3y = 0$

$$(ii) y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$. (iii) y'' + 16y = 0$$

Линеји:

$$\text{Ако } y(x) = e^{rx} \text{ онда је решење}$$

$$y'(x) = re^{rx}$$

$$y''(x) = r^2 e^{rx}$$

$$\text{онда } (i) r^2 e^{rx} + 4re^{rx} + 3e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx} (r^2 + 4r + 3) = 0$$

$$e^{rx} \neq 0 \quad r^2 + 4r + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

Сумножи, највећији домн знос, ливо:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

$$(ii) r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 9e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx} (r^2 - 6r + 9) = 0$$

$$e^{rx} \neq 0 \quad r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 36 = 0 \quad \text{онда } r = \frac{6}{2} = 3$$

Сумножи, највећији домн знос, ливо:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$$

$$(iii) r^2 e^{rx} + 16e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx} (r^2 + 16) = 0$$

$$e^{rx} \neq 0 \quad r^2 + 16 = 0$$

$$\Delta = 0 - 4 \cdot 16 = -64 \quad \text{онда } r_{1,2} = \frac{-0 \pm i\sqrt{64}}{2} = \frac{\pm 8i}{2} = \begin{cases} r_1 = 4i \\ r_2 = -4i \end{cases}$$

Сумножи, највећији домн, ливо:  $y(x) = C_1 e^{0x} \cos 4x + C_2 e^{0x} \sin 4x \Rightarrow y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

2.2 Mn συμβατικούς συνδιλωτούς (Μιθοδός  
υποθέσεων λέξης - Α' Alembert)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Μιθοδός

Μιθοδός d' Alembert

"Τρόπος εύρους λιανίς διεύρυνσης μηρικών λύσεων, οπού λιανίς μήνας γίνεται μία πράξη"

(i) Av  $p(x) + xq(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) = x$  ηλική συνδιλωτού  
οπότε θίρω  $y_1(x) = xu(x)$

(ii) Av  $p(x) + q(x) + 1 = 0 \Rightarrow y_2(x) = e^x$  ηλική συνδιλωτού  
οπότε θίρω  $y_2(x) = e^x u(x)$

Ενική λύση: 
$$\boxed{Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$$

Παράδειγμα

Na λύθω ΣΔΕ:  $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$

Λύση: 
$$\left. \begin{array}{l} p(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = -\frac{1}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow p(x) + xq(x) = \frac{1}{x} - \cancel{x} \frac{1}{x^2} = 0$$
  
οπότε  $\boxed{y_1(x) = x}$  μηρική λύση

από θίρω  $y_2(x) = xu(x)$

$$y_2' = u + xu'$$

$$y_2'' = u' + u' + xu'' = 2u' + xu''$$

Αντικαθιστώ συν ν ΣΔΕ:

$$2u' + xu'' + \frac{1}{x}(u + xu') - \frac{1}{x^2}xu = 0$$

$$2u' + xu'' + \frac{1}{x}u + u' - \cancel{\frac{1}{x}u} = 0$$

$$xu'' + 3u' = 0$$

$$\boxed{u'' + \frac{3}{x}u' = 0}$$

$$u'' + \frac{3}{x} u' = 0 \quad (\times M)$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} + \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{u'} = -\frac{3}{x}$$

Oροκηπωνων  
 $\int \frac{(u')'}{u'} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \ln u' = -3 \ln x$$

$$\Rightarrow \ln u' = \ln x^{-3}$$

$$\Rightarrow u' = x^{-3}$$

Oροκηπωνων  
 $\int u' dx = \int x^{-3} dx$

$$u(x) = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Επομένως, αφού  $y_1(x) = x u(x)$

$$y_2(x) = x \left( -\frac{1}{2x^2} \right)$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{2x}$$

Τελικό, τα γενικά λύσης είναι:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$= C_1 x + C_2 \left( -\frac{1}{2x} \right)$$

$$= C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

2.3.

Euler

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0 \quad (\text{für orthogonale Kurven})$$

Methode

Σκοπός των συντελεστών να κατατίθουν στη διαφορική έξινταν τη συνθήκης αυτούς

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

1<sup>ο</sup> βήμα: Αντιτίθουμε μεταβλητές

$$x = e^t$$

$$\Rightarrow dx = e^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{x} \quad \text{όπου} \quad t = \ln x$$

$$t = \ln x$$

2<sup>ο</sup> βήμα: Αντιτίθουμε  $y'(x)$ ,  $y''(x)$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} \frac{dy}{dt} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \Rightarrow xy'(x) = \frac{dy}{dt}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} (y'(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \dots \Rightarrow x^2 y''(x) = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2}$$

3<sup>ο</sup> βήμα: Αντικαθιστάμε στη  $\Sigma \Delta E$ , και προκύπτει

$$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0$$

δ.ι. για συνθήκης αυτούς

η συντελεστή  $b$  είναι μέθοδος 2.1

## Παράδειγμα

Να λυθεί ως Π.Α.Τ.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2y'' - 2xy' - 6y = 0 \\ y(1) = 5 \\ y'(1) = 3 \end{array} \right.$$

Λύση: ΣΔΕ ζωνταν Euler, γραπτοί και ως:

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0$$

1ο  
Απλοποίηση πρόβλημα:  $x = e^t$

όποια  $t = \ln x$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

$$xy' = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

$$x^2y'' = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$y''(e) - 2y'(e) - 3y(e) = 0$$

οποίωντας ΣΔΕ πλούτης συντομεύεται

Ζνωή που διαλύεται  $y(t) = e^{rt}$

$$y'(t) = r e^{rt}$$

$$y''(t) = r^2 e^{rt}$$

οπότε  $r^2 e^{rt} - 2r e^{rt} - 3e^{rt} = 0$

$$e^{rt}(r^2 - 2r - 3) = 0$$

$$e^{rt} \neq 0 \quad r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

Ιντεριόρ, η γενική λύση είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{3 \ln x} + C_2 e^{-\ln x} \\ &\Rightarrow y(x) = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$y(1) = 5 \Rightarrow 5 = C_1 + C_2 \quad (1)$$

$$\text{Άπο } (1) + (2) \text{ προκύπτει}$$

$$C_1 = 2 \text{ και } C_2 = 3$$

$$y'(x) = 3C_1 x^2 - C_2 x^{-2} \text{ οπότε } y'(1) = 3 = 3C_1 - C_2 \quad (2)$$

$$\text{Άπο } y(x) = 2x^3 + \frac{3}{x}$$

3

### Mn oloixwv i proftikis fymwv

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0 = f(x)$$

Terimēt Dwn:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

↓  
 gennimēt Dwn  
 oforxovis gennimēt

fypimēt Dwn  
 zwu fm oforxovis

3.1

### MiθoJas zwu πroftiopisimv σuvidovis

Egaptikis f(x) òzav n SΔE liva, fm σoabtropis σuvidovis kai n ouvedpion

$$f(x) \text{ ixiu zwu fopyni: } f(x) = e^{ax} [P_1(x) \cos(\beta x) + Q_1(x) \sin(\beta x)]$$

dnw P\_1(x), Q\_1(x)  
 πoDHi zwu x  
 Roftou k\_1, k\_2 ondovis

$$\text{Inzofis fypimēt Dwn zwu fopyni: } y_p(x) = x^s e^{ax} [\Pi_1(x) \cos(\beta x) + \Pi_2(x) \sin(\beta x)] \quad (*)$$

òpou  $\Pi_1(x), \Pi_2(x)$  πoDHi zwu x, Roftou  $\beta = \max\{m_1, m_2\}$

kai s πoDHi zwu atib pijo zwu xopakunplisicis nolawvov

$$\begin{cases} \text{atib pijo, zodl s=0} \\ \text{atib pijo, zodl s=1} \\ \text{atib pijo, zodl s=2} \end{cases}$$

### Πapōmukha

$$1) \text{ Na Dwni SΔE: } y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2e^{3x} - e^{2x}$$

Aion: Tnu xwpiSousi or Dwo:

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2e^{3x} \quad (1)$$

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = -e^{2x} \quad (2)$$

onize n Dwn fes θa liva or fopyni:  $y(x) = y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$

↓  
 oforxovis  
 fm oforxovis  
 (1)

fm oforxovis  
 (2)

Bpiexw zwu  $y_0$ :

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

Oforxovis gennimēt gennimēt, fm σoabtropis σuvidovis

onize  $y(x) = e^{rx}$   $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 3e^{rx} = 0$   $r_1 = 3$

$y'(x) = r e^{rx}$   $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow e^{rx} (r^2 - 4r + 3) = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \quad r_2 = 1$

$y''(x) = r^2 e^{rx}$

Αριθμοί

$$y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

$$f(x) = e^{ax} [P_s(x) \cos(\theta x) + Q_s(x) \sin(\theta x)]$$

Για ρωτήσεις (1) →  $f(x) = 2e^{3x}$   
 ιχωρικό  $a=3$ ,  $P_s(x)=2$ ,  $\theta=0$ ,  $Q_s(x)=0$   
 σημείο  $a+θs = 3+0=3$  οπού  $s=1$  ( $r_1=3$ )

Ζητάεται προκώπια για την εξισώση:

$$y_{p_1}(x) = x^s e^{ax} [P_s(x) \cos(\theta x) + Q_s(x) \sin(\theta x)] = x e^{3x} [K \cdot 1 + L \cdot 0] = K x e^{3x}$$

$$y'_{p_1}(x) = 1K e^{3x} + 3K x e^{3x}$$

$$y''_{p_1}(x) = 3K e^{3x} + 3K x e^{3x} + 9K x e^{3x} = 6K e^{3x} + 9K x e^{3x}$$

σημείο αντικαθίστανται στην (1), ιχωρικό:

$$6K e^{3x} + 9K x e^{3x} - 4K e^{3x} - 12K x e^{3x} + 3K x e^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow 2K e^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow K = 1 \quad \text{σημείο}$$

$$y_{p_1}(x) = x e^{3x}$$

Για ρωτήσεις (2) →  $f(x) = -e^{2x}$

$$\text{ιχωρικό } a=2, P_s(x)=-1, \theta=0, Q_s(x)=0$$

$$\text{σημείο } a+θs=2, s=0 \quad (\text{διαλογισμένα } r_1=3, r_2=1)$$

σημείο προκώπια για την εξισώση:

$$y_{p_2}(x) = K e^{2x}$$

$$y'_{p_2}(x) = 2K e^{2x}$$

$$y''_{p_2}(x) = 4K e^{2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αντικαθίστανται} \\ \Rightarrow \text{στην (2)} \end{array} \right\} \begin{aligned} 4K e^{2x} - 8K e^{2x} + 3K e^{2x} &= -e^{2x} \\ \Rightarrow -K e^{2x} &= -e^{2x} \\ \Rightarrow K &= 1 \quad \text{σημείο} \end{aligned}$$

$$y_{p_2}(x) = e^{2x}$$

► Περικοπή Αναν ΣΔΕ:

$$y(x) = y_o(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + x e^{3x} + e^{2x}$$

$$2) \text{ Na } \mathcal{D}_x \theta_1 \text{ } \Sigma \Delta E: \quad y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

Aján: Térkörű Aján zs függés:

$$y(x) = y_o(x) + y_f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Bérik a } y_o(x): \quad y'' - 2y' + 5y = 0 & \quad \left. \begin{array}{l} r_1 = 1+2i \\ r_2 = 1-2i \end{array} \right\} \Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \\ y = e^{rx} & \end{aligned}$$

$$\text{onnan } y_o(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

$$y_o(x) = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$\begin{aligned} \text{Bérik a } y_f(x): \quad f(x) = \sin 2x & \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ P_1(x) = 0 \\ Q_1(x) = 1 \\ \beta = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1(x) = 0 \\ f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos(\beta x) + Q_1(x) \sin(\beta x)] & \end{aligned}$$

$$\text{onnan } \alpha + \beta i = 2i, \beta = 0$$

Zsöföl független Aján zs függés:

$$\begin{aligned} y_f(x) &= x^s e^{\alpha x} [P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)] = k \cos 2x + \lambda \sin 2x \\ y'_f(x) &= -2k \sin 2x + 2\lambda \cos 2x \\ y''_f(x) &= -4k \cos 2x - 4\lambda \sin 2x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow \end{array} \right\}$$

Azaz  $\theta_1$ -nél  
onnan  $\Sigma \Delta E$

$$-4k \cos 2x - 4\lambda \sin 2x + 4k \sin 2x - 4\lambda \cos 2x + 5k \cos 2x + 5\lambda \sin 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow (k-4\lambda) \cos 2x + (\lambda+4k) \sin 2x = \sin 2x$$

$$k-4\lambda = 0 \quad \text{akk.} \quad \lambda+4k = 1$$

$$\text{óta} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{4}{17} \\ \lambda = \frac{1}{17} \end{array} \right.$$

$$\text{onnan } y_f(x) = \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x$$

$$\text{► Térkörű Aján } \Sigma \Delta E: \quad y(x) = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x$$

3.2

Miθojsos μεταβολής zwv παρατίρων ( Miθojsos Lagrange)

$$y^n(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \dots + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = g(x)$$

Γενική Λύση:  $y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{όμοιωση}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{μεταβολή}}$

Miθojsodoxia

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$$

Δημιουργούμε το σύστημα:

$$c'_1(x) y_1(x) + \dots + c'_n(x) y_n(x) = 0$$

$$c'_1(x) y'_1(x) + \dots + c'_n(x) y'_n(x) = 0$$

⋮

$$c'_1(x) y^{n-1}(x) + \dots + c'_n(x) y_n^{n-1}(x) = g(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Βρισκούμε το} \\ c_1(x), \dots, c_n(x) \end{array} \right\}$$

επομένως θρησκούμε την  $y_p(x)$

Παράτυχα

Με λύθη n ΣΔΕ:  $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$

Λύση: Η γενική δύση είναι ως βοηθός:  $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Βρισκω  $y_0$ :  $y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \\ y = e^{rx} \end{array} \right\}$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \quad r_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

Άρα,  $y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

Επομένως, η μεταβολή δύση  $y_p(x)$  θα είναι ως βοηθός:

$$y_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{3x}$$

Ճնշությունը և առանք:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^x = 0 \\ 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^x \\ 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^x \\ -2c_2'(x)e^{3x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^x \\ c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -2e^{-x} \\ c_2'(x) = 2e^{-2x} \end{cases}$$

Եղանակ,

$$c_1(x) = \int -2e^{-x} dx = -2 \int e^{-x} dx = 2e^{-x}$$

$$c_2(x) = \int 2e^{-2x} dx = 2 \int e^{-2x} dx = 2 \frac{e^{-2x}}{-2} = -e^{-2x}$$

օրպ  $y_p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$

$$\begin{aligned} &= 2e^{-x}e^{2x} + (-e^{-2x})e^{3x} \\ &= 2e^x - e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

օրու  $y_p(x) = e^x$

Գլուխ հար ՏΔԷ

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^x$$

■ No. 2. θέλει να πάτε  $\left\{ \begin{array}{l} y'' + 3y' + 2y = e^{2t} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array} \right.$  με χρήση Laplace

Άρων:

$$L\{y''(x)\}(t) + 3L\{y'(x)\}(t) + 2L\{y(x)\}(t) = L\{e^{2t}\}$$

$$\left[ t^2 Y(t) - tY(0) - Y'(0) \right] + 3 \left[ tY(t) - Y(0) \right] + 2Y(t) = \frac{1}{t-2}$$

$$t^2 Y(t) + 3t Y(t) + 2Y(t) = \frac{1}{t-2}$$

$$Y(t) (t^2 + 3t + 2) = \frac{1}{t-2}$$

$$Y(t) = \frac{1}{(t-2)(t^2+3t+2)} = \frac{1}{(t-2)(t+2)(t+1)} \quad (*)$$

Οπότε

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+1}$$

$$1 = A(t+2)(t+1) + B(t-2)(t+1) + C(t-2)(t+2)$$

(To t=2 συγχώνευται)

$$\bullet t=2 \rightarrow 1 = A(2+2)(2+1) \quad \bullet t=-2 \rightarrow 1 = B(-2-2)(-2+1)$$

$$1 = 12A$$

$$A = \frac{1}{12}$$

$$1 = 4B$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$\bullet t=-1 \rightarrow 1 = C(-1-2)(-1+2)$$

$$1 = 3C$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρων } (*) \quad Y(t) = \frac{1}{12} \frac{1}{t-2} + \frac{1}{4} \frac{1}{t+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{t+1}$$

Οπότε ανατρ. μεθόδος Laplace

$$Y(t) = \frac{1}{12} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-t}$$

□ № 2. УДЛІ 20 ПАТ  $y'' + y = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$       Із цих умов використовується метод Лапласа

Лінія:  $f(x) = y'' + y$

Інвірсне homogeneous RHP:  $f(x) = 1 - u(x-1)$

отже  $y'' + y = 1 - u(x-1)$

Еквівалентне рівняння Лапласа:  $[t^2 y(t) + t y'(t)] + y(t) = L\{1\} - L\{u(x-1)\}$

$$t^2 y(t) + y(t) = \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}$$

$$y(t) \left( t^2 + 1 \right) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{(t^2 + 1)t}$$

отже

$$y(t) = (1 - e^{-t}) \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + 1} \right)$$

$$= (1 - e^{-t}) (L\{1\} - L\{\cos x\})$$

$$= (L\{1\} - L\{\cos x\}) - e^{-t} (L\{1\} - L\{\cos x\})$$

Хронометрическі умови використовуються для зворотного відображення:  $L^{-1}(e^{-at} f(t)) = u(x-a) f(x-a)$

отже  $y(x) = L^{-1}\{y(t)\} = (1 - \cos x) - u(x-1)[1 - \cos(x-1)]$

$$f(x) = 1 - u(x-1)$$

Але  $y(x) = \begin{cases} 1 - \cos x - 1 + \cos(x-1) & t < 1 \\ 1 - \cos x + 1 - \cos(x-1) & t \geq 1 \end{cases}$

тако  $f(x) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 = 1 - u(x-1) \Rightarrow u(x-1) = 1$   
 $\Rightarrow 2 = 1 - u(x-1) \Rightarrow u(x-1) = -1$