

6

Pυθαρος Μεταβολησ

Taxiarchia - Enizexuvon

■ Pυθαρος Μεταβολησ $\rightsquigarrow f'(x)$

Taxiarchia in xpoliki ομηρη t $\rightsquigarrow u(t) = x'(t)$

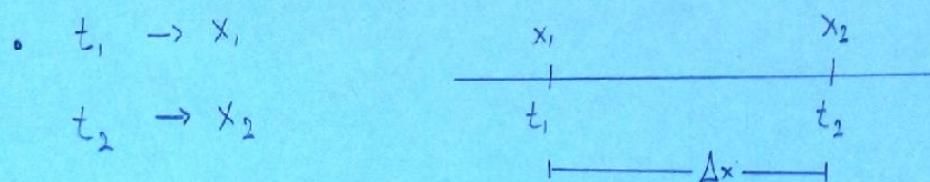
Enizexuvon in xpoliki ομηρη t $\rightsquigarrow a(t) = x''(t)$ in $a(t) = u'(t)$

$$s(t), x(t) \rightsquigarrow \text{km, m} \quad u(t) \rightsquigarrow \frac{\text{km}}{\text{h}}, \frac{\text{m}}{\text{h}}, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$t \rightsquigarrow \text{h, min, sec} \quad a(t) \rightsquigarrow \frac{\text{km}}{\text{h}^2}, \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

Παραγραφούσις

- kivnisi sivei ekivnisi $\Rightarrow u(t) = 0$
- zo kivnisi kivnisi ozn θessiki kozwüθuvon $\Rightarrow u(t) > 0$
- zo kivnisi kivnisi ozn opvnsiki kozwüθuvon $\Rightarrow u(t) < 0$



$$\Delta \vec{x} = x_2(t_2) - x_1(t_1)$$

Mezeranion

$$s = |x_2(t_2) - x_1(t_1)|$$

Anōraon

A

Pυθήσις Μεταβολής

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

Να ψηφίζεται το πυθήσιμο μέτρο της συνάρτησης f όπου προς x , όταν $x = -1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) \\ &= 3 \cdot 1 + 6 \\ &= 3 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

② * Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

Να ψηφίζεται το πυθήσιμο μέτρο της παραγόντος της f προς x , όταν $x = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 2$$

$$= 6 - 2$$

$$= 4$$

B

Προβλήματα

③ Η αξία ενός αυτοκινήτου (σε χιλιόμετρα €), τη χρήση της οποίας γίνεται ανά μην σύμφωνα με την σχέση $f(t) = 50 - t^2$, $0 \leq t \leq 7$

a. Ποια είναι η αξία αγοράς του αυτοκινήτου;

b. Ποια είναι η αξία του αυτοκινήτου περίπου 4 χρόνια;

c. Ποιος είναι ο πιθανός βιαστός της αξίας του αυτοκινήτου συνιδήτως χρονικής διάρκειας (και) ποιος ο πιθανός βιαστός της αξίας του περίπου 5 χρόνια;

a. Αγορά αυτοκινήτου δεν έχει $t=0$

$$f(0) = 50 - 0^2$$

$$= 50 \text{ χιλιόμετρα } €$$

b. Μετά από 4 χρόνια $t=4$

$$f(4) = 50 - 4^2$$

$$= 50 - 16$$

$$= 34 \text{ χιλιόμετρα } €$$

c. $f'(t) = -2t$ για οποιαδήποτε χρονική διάρκεια

Για μετά από 5 χρόνια έχει

$$f'(5) = -2 \cdot 5$$

$$= -10$$

Γ

Taxίζντα - Επιρροέων

- (4) H θέση ενός ολικού αντιτού, το οποίο στρίψει ευθύγραφην κίνησην από τη ράγη $x = x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$, δημοσιεύεται στη Διαδίκτυο (sec) και το x σε μέτρα (m)
- Να βρείτε την ταχύτητα και την επιρροήν του αντιτού για $t = 5$ s.
 - Πόση είναι η ταχύτητα στην πλατφόρμα στον θερινό ηλιοβασιλέμα;
 - Να βρείτε την απόσταση από την παραστρατιωτική στάση στην κίνηση του αντιτού.
 - Να βρείτε το άλικό διάστημα που ισχύει διανομής του αντιτού στην Ελλάδα για πρώτη φορά.

$$\text{a. } x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$$

$$v(t) = -3t^2 + 24t - 36$$

$$a(t) = -6t + 24$$

Για $t = 1$

$$v(1) = -3 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 36$$

$$= -3 + 24 - 36$$

$$= -39 + 24$$

$$= -15 \text{ m/s}$$

$$a(1) = -6 \cdot 1 + 24$$

$$= -6 + 24$$

$$= 18 \text{ m/s}^2$$

$$B. u(t) = 0$$

$$-3t^2 + 24t - 36 = 0$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4Ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

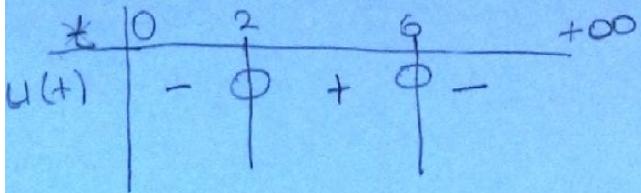
$$t_1 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad t_2 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$t_1 = 6 \text{ sec}$$

$$t_2 = 2 \text{ sec}$$

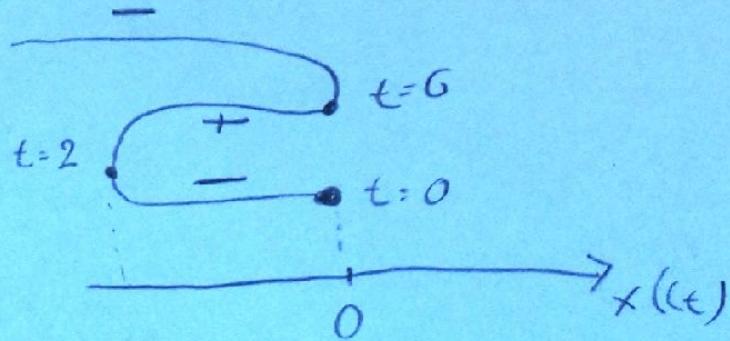
$$u(t) = -3t^2 + 24t - 36$$

g. anio & epwmpas.



$u(t) > 0$ ócav $t \in (2, 6)$ θekin nazeinduvon

$u(t) < 0$ ócav $t \in [0, 2] \cup (6, +\infty)$ apunuki nazeinduvon



$$\text{J) } \underset{t=0}{\text{fia}} \quad x(0) = 0^3 + 12 \cdot 0^2 - 36 \cdot 0 = 0 \text{ m}$$

$$\underset{t=2}{\text{fia}} \quad t = 2$$

$$x(2) = -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 = -8 + 48 - 72 = -80 + 48 = -32$$

$$\underset{t=6}{\text{fia}} \quad t = 6$$

$$x(6) = -6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 = -216 + 432 - 216 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Apas} \quad S &= S_1 + S_2 \\ &= 32 + 32 \\ &\uparrow \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\underset{0 < t < 2}{\text{fia}}$$

$$S_1 = |x(2) - x(0)| = |-32 - 0| = 32 \text{ m}$$

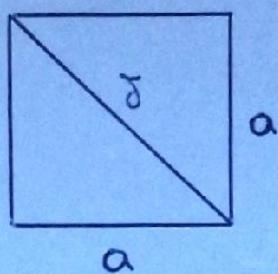
$$\underset{2 < t < 6}{\text{fia}}$$

$$S_2 = |x(6) - x(2)| = |0 - (-32)| = 32 \text{ m}$$

Tύποι Βασικών Γεωμετρικών Μηχανών

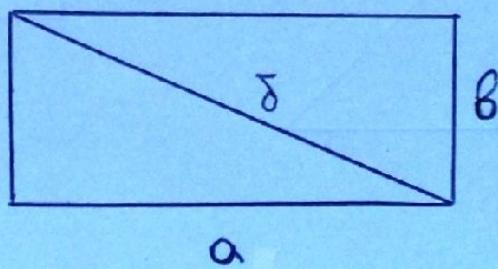
► Tετράγωνο

- Πλευρής $\pi = 4a$
- Επιφάνεια $E = a^2$
- Διαγώνιος $\delta^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$



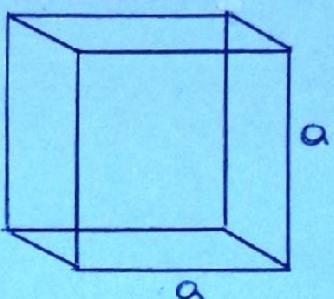
► Ορθογώνιο

- Πλευρής $\pi = 2a + 2b$
- Επιφάνεια $E = a \cdot b$
- Διαγώνιος $\delta^2 = a^2 + b^2$



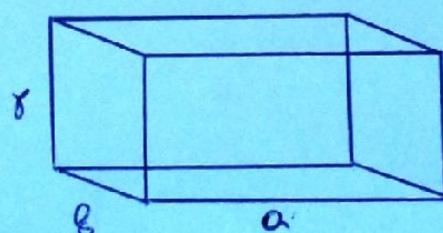
► Κύβος

- Επιφάνεια $E = 6a^2$
- Όγκος $V = a^3$



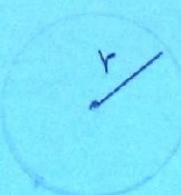
► Ορθογώνιο παραλληλότοπο

- Επιφάνεια $E = 2ab + 2bx + 2x^2$
- Όγκος $V = abx$



► Κύλινδρος

- Μήκος $L = 2\pi r$
- Επιφάνεια $E = \pi r^2$

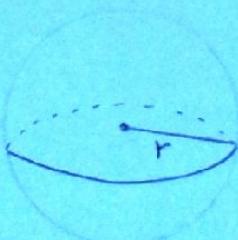


Διάφυτος κύλινδρος δ

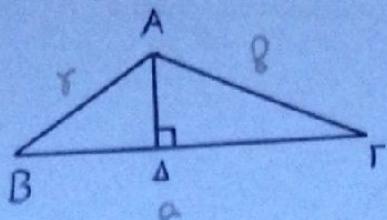
$$\delta = 2p = p + p \\ = r + r$$

► Σφαίρα

- Επιφάνεια $E = 4\pi r^2$
- Όγκος $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



► Τρίγωνο



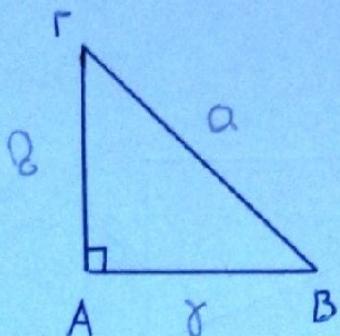
• Περιφέρεια

$$\Pi = a + b + c$$

• Εμβατής

$$E = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$$

Πυθαγόριο Θεώρηα



$$a^2 = b^2 + c^2$$

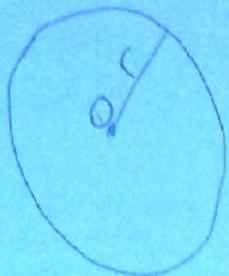
$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2$$

Δ

Προβλήματα Γεωμετρίας

5. Έστω κυκλικός δίκος ακριβας τ και υπόστρου E.

Να βριξε το πεθέντο μεγεθός του E ως προς τ, ήσαν τ=3



$$E(r) = \pi r^2$$

$$E'(r) = 2\pi r$$

$$E'(3) = 2\pi \cdot 3$$

$$= 6\pi$$

6. Να βριξε το πεθέντο μεγεθός του ογκου V της σφαίρας ακριβας τ ως προς τ, ήσαν τ=2.

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V'(r) = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \pi r^2$$

$$= 4\pi r^2$$

$$V'(2) = 4 \cdot \pi \cdot 2^2$$

$$= 4\pi 4$$

$$= 16\pi$$

E

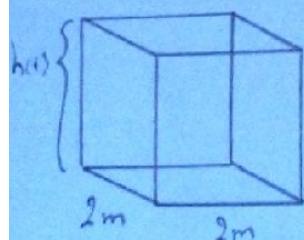
ΕΛΙΚΕΣ

Σε μια άδεια διζαφέρνη σχηματίζεται κύβος ακτίνης 2m προσθίζοντας νερό.
Το ύψος h (σε m) της στάθμης του νερού στη διζαφέρνη, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min) είναι $h(t) = \frac{t^2}{32}$.

a. i) Να βρισκεται το ύψος της στάθμης του νερού στο χρόνο $t=4$ min.

ii) Να βρισκεται πυθμετρικής της υψους του νερού στο χρόνο $t=4$ min
a) i. Για $t=4$ min

$$h(4) = \frac{4^2}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m}$$



$$\text{ii}) h'(t) = \frac{1}{32} \cdot t^2 = 2 \cdot \frac{t}{32} = \frac{t}{16}$$

Για $t=4$ min

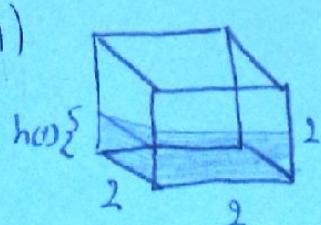
$$h'(4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m}$$

b. i) Να διμερεί ο όγκος του νερού στη διζαφέρνη περίπου στο χρόνο t min

είναι $V(t) = \frac{1}{8} t^2 \text{ σε } \text{m}^3$

ii) Να βρισκεται πυθμετρικής της όγκου του νερού στη χρονική στιγμή $t=6$ min.

$$V(t) = a \cdot l \cdot g = 2 \cdot 2 \cdot h(t) = 4 \cdot \frac{t^2}{32} = 4 \cdot \frac{t^2}{8 \cdot 4} = \frac{t^2}{8} = \frac{1}{8} t^2 \text{ m}^3$$



$$\text{iii}) V'(t) = 2 \cdot \frac{1}{8} t = \frac{1}{4} t$$

Για $t=6$ min

$$V'(6) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

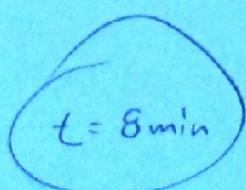
c. Να βρισκεται στο πάνω χρόνο θα γεμίσει η διζαφέρνη.

$$V(+)=8$$

$$\frac{t^2}{8}=8$$

$$t^2=64$$

$$t=\sqrt{64}=8 \text{ min}$$



$$V=a^3=2^3=8 \text{ m}^3$$

8' χρόνος

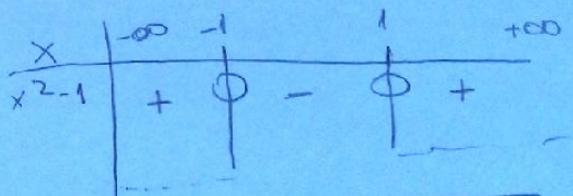
$$h(t)=2$$

$$\frac{t^2}{32}=2$$

$$t^2=64 \Rightarrow t=8$$

Iuvðiænikis Ariknolis

1. Δινεται η συνάριθμη $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- Να βριξε το μέσο ορισθού της συνάριθμης f .
 - Να βριξε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάριθμης f .
 - Να υπολογίσεται το ρυθμός παραβολής της συνάριθμης f ως προς x όταν $x=2$
 - Να βριξε το συντελεκτικό διεύθυνσης της εγκατάστασης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = -2$
 - Να βριξε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2)$



$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{a. } x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 0 + 4 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{b. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

• Град $x=2$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{4-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5. $\lambda = f'(-2)$

$$\lambda = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 - 1}}$$

$$\lambda = \frac{-2}{\sqrt{4-1}}$$

$$\lambda = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2) \stackrel{!}{=} \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

!!! На аналогиче
 $f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - \sqrt{3}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2)$$

2

$$\Delta \text{ivarei} \text{ n συνάρτηση } f(x) = \frac{nux}{2-ovux}$$

$$4 -100 \leq 100uvx \leq 100 \\ -1 \leq uvx \leq 1 \\ -1 \leq ovux \leq 1$$

a. Na 8pizze zo nūcio opisofou zns συνάρτησης f.

$$b. Na 8pizze ήai $f'(x) = \frac{2ovux-1}{(2-ovux)^2}$$$

c. Na 8pizze zo puthi herabolisis zns συνάρτησης f ws πpos x, ήai $x = \frac{\pi}{2}$

d. Na 8pizze znv εφεντοfion σai γραφική παράσταση zns f, σai οnūcio zns A(0, f(0))

$$a. 2-ovux \neq 0$$

Sloka $\Rightarrow -1 \leq uvx \leq 1$ apai $\Rightarrow 2-ovux > 0$ $\overset{\text{D.O.}}{A = \mathbb{R}}$

$$b. f'(x) = \frac{(nux)'(2-ovux) - (nux)(2-ovux)'}{(2-ovux)^2}$$

$$= \frac{ovux(2-ovux) - nux(2-ovux)}{(2-ovux)^2}$$

$$= \frac{2ovux - ovu^2x - nu^2x}{(2-ovux)^2}$$

$$= \frac{2ovux - 1(ovu^2x + nu^2x)}{(2-ovux)^2}$$

$$= \frac{2ovux - 1}{(2-ovux)^2}$$

c. auto B ερώτημα o puthi herabolisis einai $f'(x) = \frac{2ovux-1}{(2-ovux)^2}$

• Γia $x = \frac{\pi}{2}$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2ov\frac{\pi}{2} - 1}{(2-ov\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{(2-0)^2} = \frac{0-1}{(2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$8. A(0, f(0)) \rightsquigarrow A(0, 0)$$

$$\mathcal{E}: y = Ax + B$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{2 - 0 \cdot 0} = \frac{0}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lambda = f'(0)$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 0 - 1}{(2 - 0 \cdot 0)^2}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1 - 1}{(2 - 1)^2}$$

$$\lambda = \frac{2 - 1}{(1)^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{1}$$

$$\lambda = 1$$

$$\mathcal{E}: y = \lambda x + B$$

$$0 = 1 \cdot 0 + B$$

$$0 = 0 + B$$

$$0 - 0 = B$$

$$0 = B$$

$$\boxed{\mathcal{E}: y = x}$$

3) Δινέται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

O συναρτητής διεύθυνες της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$ είναι 9 και ο πυθός λαρούτης της f ως προς x , όταν $x = 1$ είναι 0 .

a) Να βρίσκεται $a = -6$ και $b = 9$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\bullet \quad 2 = f'(0) = 9$$

$$3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 9$$

$$0 + 0 + b = 9$$

$$b = 9$$

$$\bullet \quad f'(1) = 0$$

$$3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0$$

$$3 + 2a + 9 = 0$$

$$2a = -9 - 3$$

$$\frac{2a}{2} = \frac{-12}{6}$$

$$a = -6$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

b) H θέση στην οποία ανήκει το ονοματεπώνυμον,

δινέται από τον χώρο $x = x(t) = f(t)$, όπου το t λαριστεί στη διεύθυνση
και το x στη λύση. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

(i) Να βρίσκεται το ταχύτητα του ανθρώπου στο χρόνο t .

(ii) Πότε το ανθρώπινο σύστημα (συγγενεία) ακίνητο;

(iii) Να βρίσκεται την ταχύτητα του ανθρώπου μέσα από 5 sec.
 $a(t) = u'(t)$

$$\text{iii)} a(t) = 6t - 12$$

$$\text{Για } t = 5 \text{ sec} \Rightarrow a(5) = 6 \cdot 5 - 12$$

$$= 30 - 12$$

$$= 18 \text{ m/sec}^2$$

$$\text{i)} u(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\text{ii)} u(t) = 0$$

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 144 - 108 = 36$$

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$$t_1 = \frac{12+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$t_2 = \frac{12-6}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$u(t) = 0 \text{ οπως } t_1 = 1 \text{ sec} \\ t_2 = 3 \text{ sec}$$