ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

M.Sc. PROGRAM

"ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Ι"

Ι. ΚΟΥΓΙΑΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΝΤΙΡΡΙΟ 2013-2014

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}</u>

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

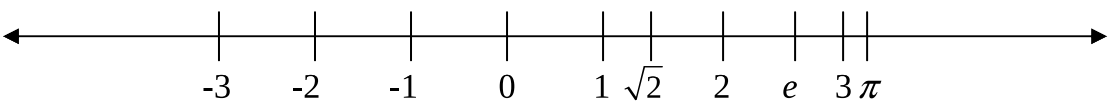
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των **Πραγματικών Αριθμών** $(\mathbb{R})$ αποτελείται από τους ρητούς $(\mathbb{Q})$ αριθμούς, δηλαδή τους θετικούς[1] και αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $(\mathbb{Z})$, το μηδέν και τα κλάσματα a/b, όπου τα a και b είναι ακέραιοι και από τους άρρητους αριθμούς $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, εκείνους δηλαδή που έχουν άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, όπως είναι οι $\pi = 3{,}14159\ldots$, $e = 2{,}71828\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ κ.λ.π., οι οποίοι δεν μπορεί να γραφούν ως κλάσματα με αριθμητή και παρανομαστή ακέραιους. (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Η **Απόλυτη Τιμή** $|A|$ ενός πραγματικού αριθμού A ορίζεται ως:

$$|A| = A \text{ εάν } A \text{ είναι θετικός αριθμός ή } 0 \text{ και}$$
$$|A| = -A \text{ εάν } A \text{ είναι αρνητικός αριθμός.}$$

Για παράδειγμα, $|2| = |-2| = 2$, $|2-6| = |6-2| = 4$,

$$|x-y| = x-y \text{ εάν } x \geq y \text{ και}$$
$$|x-y| = y-x \text{ εάν } x \prec y.$$

Γενικά, εάν x, y είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, συμβολικά $x, y \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$
$$|x \pm y| = |y \pm x|,$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0,$$

[1] Οι ακέραιοι θετικοί αριθμοί $(\mathbb{N})$ ονομάζονται και Φυσικοί Αριθμοί.

$$|x+y| \geq |x|-|y|,$$
$$|x-y| \leq |x|+|y|,$$
$$|x+y| \leq |x|+|y|,$$
$$|x-y| \geq |x|-|y|.$$

Εάν $x, y \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $x \prec y$, τότε ο x πάνω στην ευθεία (των πραγματικών αριθμών) βρίσκεται στα αριστερά του y, ενώ εάν $x \succ y$, τότε ο x βρίσκεται στα δεξιά του y.

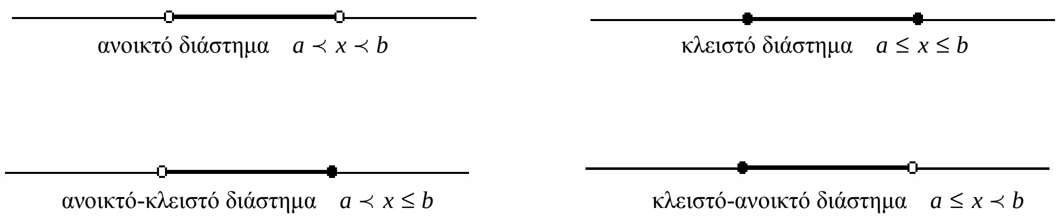
Η απόσταση από το x στο y δίνεται από τη διαφορά $|y-x| = |x-y|$.

1.2 Διαστήματα

α) **<u>Πεπερασμένο διάστημα</u>:** Έστω ότι a και b δυο αριθμοί, τέτοιοι ώστε $a \prec b$, τότε το σύνολο όλων των αριθμών x που βρίσκονται μεταξύ των a και b, ονομάζεται ***ανοικτό*** διάστημα από το a στο b και γράφεται $a \prec x \prec b$ ή $x \in (a,b)$. Τα σημεία a και b ονομάζονται <u>*άκρα*</u> του διαστήματος. Στην περίπτωση δε ενός ανοικτού διαστήματος, τα άκρα του <u>δεν</u> περιλαμβάνονται σ' αυτό.

Το ανοικτό διάστημα $a \prec x \prec b$ μαζί με τα άκρα του a και b ονομάζεται ***κλειστό*** διάστημα και γράφεται $a \leq x \leq b$ ή $x \in [a,b]$.

Ένα πεπερασμένο διάστημα μπορεί να είναι: ανοικτό (a,b) ή κλειστό $[a,b]$ ή ανοικτό - κλειστό $(a,b]$ ή, τέλος, κλειστό - ανοικτό $[a,b)$. (Βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2

β) **<u>Άπειρο διάστημα</u>:** Έστω a ένας οποιοσδήποτε αριθμός, τότε το σύνολο όλων των αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $x \prec a$ ονομάζεται ***άπειρο*** διάστημα. Άλλα τέτοια άπειρα διαστήματα ορίζονται από $x \leq a$, $x \succ a$ και $x \geq a$.

1.3 Μεταβλητές και σταθερές

Σε κάθε μαθηματικό τύπο ή αλγεβρική παράσταση χρησιμοποιούνται γράμματα και σύμβολα για να παραστήσουν διάφορες ποσότητες ή αριθμούς. Μερικά από αυτά παριστάνουν ***μεταβλητές*** ποσότητες και άλλα παριστάνουν ***σταθερές*** ποσότητες. Οι μεταβλητές μπορεί να είναι <u>ανεξάρτητες</u>, όταν μεταβάλλονται ελεύθερα παίρνοντας τιμές από κάποιο σύνολο X ή εξαρτημένες, όταν οι τιμές τους βρίσκονται σε ένα σύνολο Ψ και εξαρτώνται από τις τιμές μια ανεξάρτητης μεταβλητής. Για παράδειγμα στον τύπο του όγκου μιας σφαίρας:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

όπου το V παριστάνει τον όγκο και το r την ακτίνα της σφαίρας και είναι η εξαρτημένη και η ανεξάρτητη μεταβλητή αντίστοιχα, ενώ τα π και $\frac{4}{3}$ είναι σταθερές.

Επίσης στον τύπο: $s = \frac{1}{2}gt^2$,

της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων, το s παριστάνει το διάστημα που διανύει το σώμα σε χρόνο t. Το μεν πρώτο είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, το δε δεύτερο είναι η ανεξάρτητη. Επί πλέον τα $g = 10\, {}^{m}\!/_{\sec^2}$ και $\frac{1}{2}$ είναι σταθερές ποσότητες.

Και στα δυο πιο πάνω παραδείγματα τα σύνολα X και Ψ από τα οποία παίρνουν τιμές οι εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεγαλυτέρων ή ίσων με το μηδέν $\left([0, +\infty) = \mathbb{R}_0^+\right)$.

Τέλος ένα ακόμη απλό παράδειγμα είναι η γνωστή αλγεβρική παράσταση:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

όπου τα α, β, γ παριστάνουν σταθερές, ενώ τα x και y είναι η ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή αντίστοιχα. Στο παράδειγμα αυτό τα σύνολα A και B είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

1.4 Συναρτήσεις - Ορισμοί - Είδη Συναρτήσεων - Γραφικές Παραστάσεις

Η εξάρτηση ή, αλλιώς, η σύνδεση μεταξύ δυο μεταβλητών, μιας ανεξάρτητης και μιας εξαρτημένης, μπορεί να εκφραστεί καλύτερα από την πρόταση: **η εξαρτημένη μεταβλητή είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής, ή ότι, υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ αυτών των μεταβλητών.**

Έτσι, στα δυο πρώτα παραδείγματα παρά πάνω λέμε ότι:

1) Ο όγκος της σφαίρας είναι συνάρτηση της ακτίνας της.
2) Το διάστημα είναι συνάρτηση του χρόνου πτώσης του.

Αναρίθμητα παραδείγματα μπορούμε να σκεφτούμε για τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ διαφόρων ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα,

- Το ημίτονο, συνημίτονο κ.λ.π. μιας γωνίας είναι συναρτήσεις της γωνίας.
- Η περίοδος ενός εκκρεμούς είναι συνάρτηση του μήκους του.
- Ο λογάριθμος ενός αριθμού είναι συνάρτηση του αριθμού αυτού κ.λ.π..

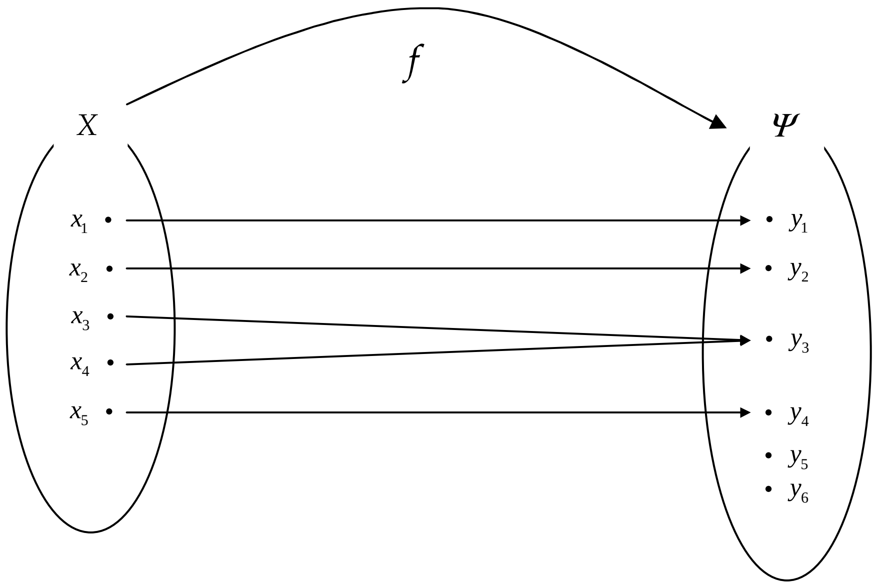
Έχοντας ως οδηγό όλα τα πιο πάνω μπορούμε να δώσουμε ένα ακριβέστερο ορισμό της έννοιας της συνάρτησης.

<u>Ορισμός</u>: Έστω δυο σύνολα X και Ψ και f ένας κανόνας που σε κάθε στοιχείο x του X αντιστοιχίζει <u>ένα και μόνον ένα</u> στοιχείο y του Ψ.
Τότε, η τριάδα (X, f, Ψ) ονομάζεται συνάρτηση, η οποία ορίζεται στο X με τιμές στο Ψ και συνήθως γράφουμε $f : X \to \Psi$. Η εξαρτημένη μεταβλητή y ονομάζεται **τιμή της συνάρτησης** f στο σημείο x που είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και γράφουμε: $y = f(x)$.

Το σύνολο X ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $D(f)$.

Το δε σύνολο των τιμών που παίρνει η f καθώς το x διατρέχει το σύνολο X ονομάζεται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f και συμβολίζεται με $R(f)$ και είναι γενικά ένα υποσύνολο του συνόλου Ψ.

<u>Παραδείγματα</u>: α)



Σχήμα 3

Στο πιο πάνω σχήμα έχουμε:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ και $\Psi = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, ο δε κανόνας f είναι τέτοιος ώστε:

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$, $f(x_4)=y_3$, $f(x_5)=y_4$.

Είναι δε μια συνάρτηση $f: X \to \Psi$ με $D(f)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=X$ και $R(f)=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}\subseteq \Psi$.

β) Η $y=f(x)=x^2$ είναι μια συνάρτηση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού $D(f)=\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών $R(f)=\mathbb{R}_0^+$.

Στον πίνακα πιο κάτω βλέπουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές των δυο μεταβλητών, της ανεξάρτητης x και της εξαρτημένης y.

x	$-\infty\ \cdots$	-4	-3	-2	0	2	3	4	$-\infty\ \cdots$
y	$+\infty\ \cdots$	16	9	4	0	4	9	16	$+\infty\ \cdots$

Για την πιο πάνω συνάρτηση f παρατηρούμε ότι: $f(-4)=f(4)=16$, $f(-3)=f(3)=9,\ldots$ και γενικά

$$f(-x)=f(x).$$

Τέτοιες συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει η παρά πάνω σχέση, ονομάζονται ***άρτιες συναρτήσεις,*** ενώ αν ισχύει η σχέση:

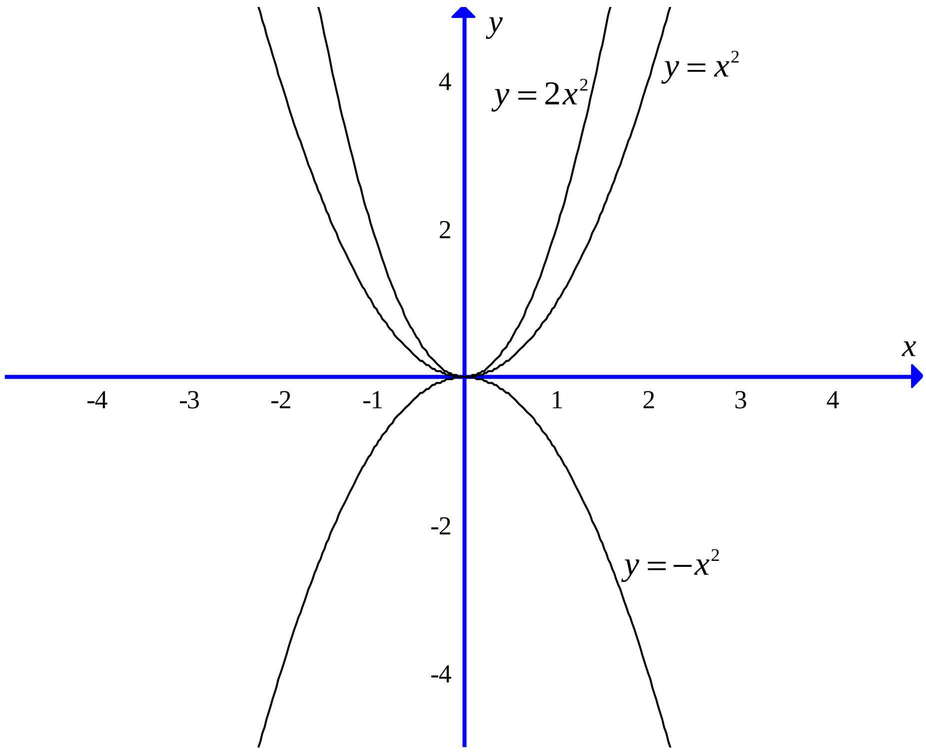
$$f(-x)=-f(x),$$

ονομάζονται ***περιττές συναρτήσεις.*** Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=x^3$.

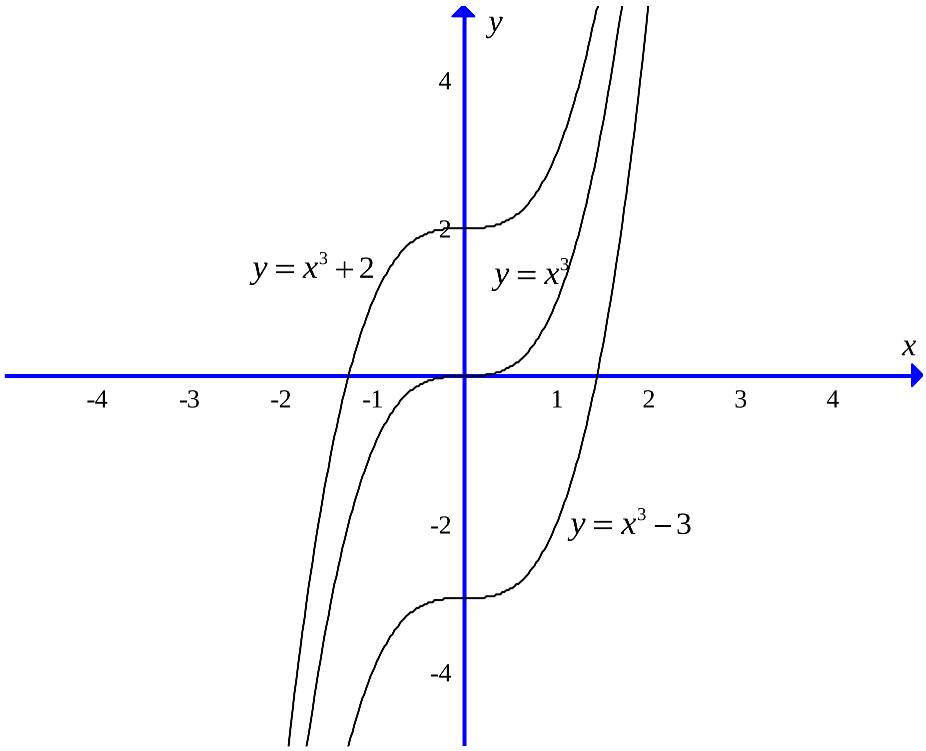
Γραφική παράσταση συναρτήσεων

Γραφική παράσταση ή γράφημα ή διάγραμμα μιας συνάρτησης $f: X \to \Psi$ ονομάζουμε το σύνολο $G=\{(x,f(x)),x\in X\}$. Αυτό στο Καρτεσιανό επίπεδο, δηλαδή στο σύστημα των ορθογωνίων αξόνων xx' και yy' παριστάνεται με μια γραμμή και κάθε σημείο της, P, έχει συντεταγμένες ένα ζεύγος (x,y), όπου $x\in D(f)$ και $y\in R(f)$.

Βλέπουμε παρακάτω, (Σχήμα 4, Σχήμα 5) τις γραφικές παραστάσεις μερικών γνωστών συναρτήσεων.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Αντίστροφες Συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω ότι $f : X \to \Psi$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $y = f(x)$. Αν υπάρχει μια άλλη συνάρτηση $g : \Psi \to X$, τέτοια ώστε $x = g(y)$, τότε αυτή ονομάζεται ***αντίστροφη συνάρτηση*** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

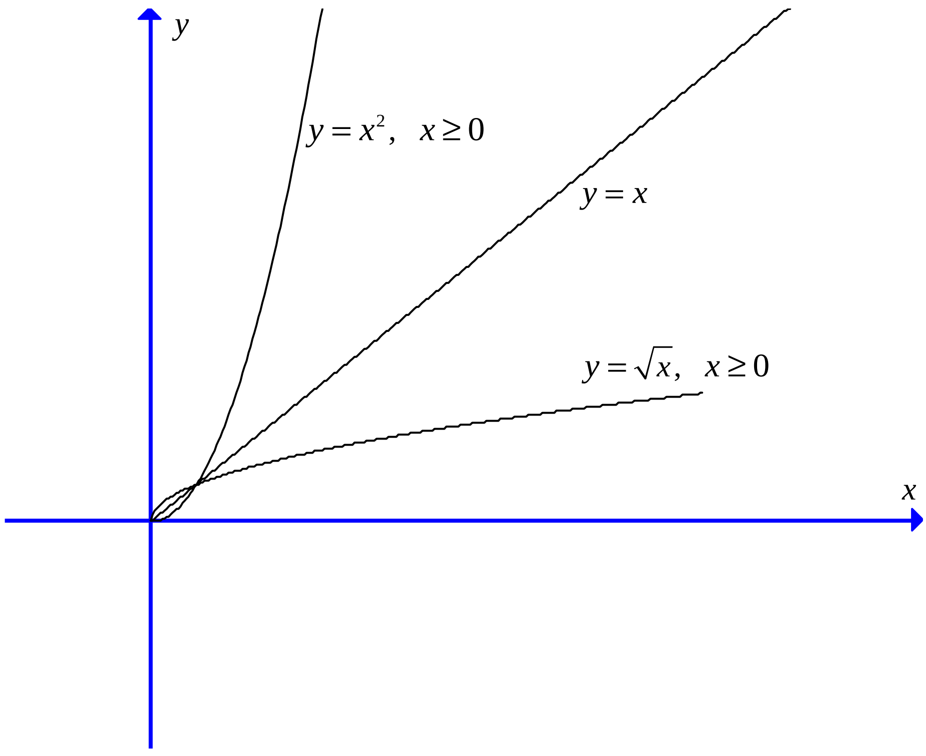
Για να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, πρέπει να συμβαίνουν τα εξής:

- Το πεδίο τιμών της f να είναι $R(f) = \Psi$, δηλαδή η f να είναι ***επί.***
- Σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f να αντιστοιχεί ένα και μόνον ένα στοιχείο του πεδίου τιμών της, δηλαδή η f να είναι ***ένα προς ένα.***

Παράδειγμα: Έστω $y = f(x) = x^2$ με $x \geq 0$, τότε η συνάρτηση :

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Βλέπουμε πιο κάτω το γράφημα των f και f^{-1}, παρατηρούμε δε ότι οι δυο αυτές καμπύλες είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τη διαγώνιο ευθεία γραμμή $y = x$.



Σχήμα 6

Στην περίπτωση της $y = f(x) = x^2$ με $x \prec 0$, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, με $x \geq 0$.

Ρητές Συναρτήσεις

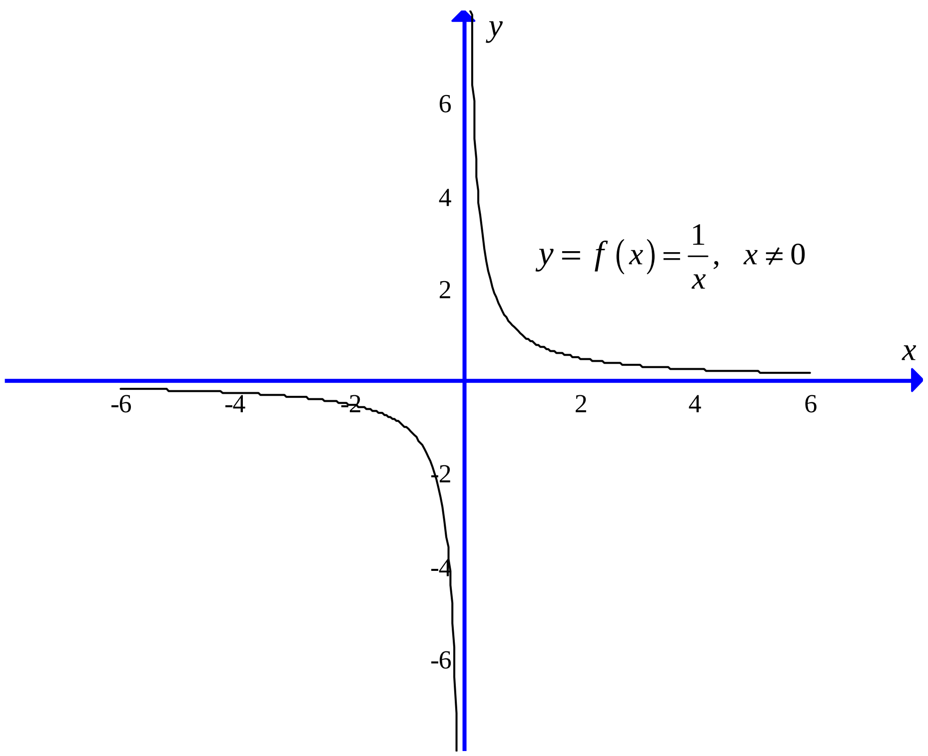
Συναρτήσεις της μορφής:

$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, με πεδίο

ορισμού $D(f) = \mathbb{R}$, ονομάζονται πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n.

Ρητή ονομάζεται μια συνάρτηση της μορφής: $y = f(x) = \dfrac{g(x)}{q(x)}$, όπου

$g(x)$ και $q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Έχει δε η f πεδίο ορισμού $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Για παράδειγμα η $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι μια ρητή συνάρτηση, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, το γράφημα της οποίας βλέπουμε στο σχήμα παρακάτω.



Σχήμα 7

Φραγμένες συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση: $f: X \to \Psi$ τέτοια ώστε $y = f(x)$, $x \in D(f)$ λέμε ότι είναι φραγμένη σε ένα σύνολο $A \subset D(f)$ όταν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει: $|f(x)| \leq m$, για κάθε $x \in A$.

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Αν μια εξίσωση, όπως για παράδειγμα η $x^2 - 2xy - 3y = 4$ επαληθεύεται από τις τιμές των x και y, αλλά και οι δυο αυτές μεταβλητές είναι στο ίδιο μέλος της εξίσωσης, με άλλα λόγια η y ορίζεται άμεσα συναρτήσει της x, τότε λέμε ότι έχουμε μια πεπλεγμένη συνάρτηση y της x.

Στο παραπάνω παράδειγμα, αν λύσουμε ως προς y παίρνουμε:

$y = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 3}$, που είναι μια ρητή συνάρτηση της y.

Άλλες πεπλεγμένες συναρτήσεις είναι: (i) $x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 9 = 0$, (ii) $xlny + y^2 = 4xy$ κ.λ.π..

Σύνθετες συναρτήσεις

Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις, μπορούμε να τις "συνδυάσουμε" για να πάρουμε μια νέα συνάρτηση $f \circ g$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right],$$

όπου το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το σύνολο όλων των x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της g έτσι ώστε τα $g(x)$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

Για παράδειγμα, έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x + 1$, τότε η $f \circ g$ δίνεται από τη σχέση:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[x + 1\right] = \sqrt{x + 1}.$$

Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και αυτό της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}_0^+$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το σύνολο όλων των x για τα οποία $g(x) = x + 1$ ανήκει στο $\mathbb{R}_0^+$, δηλαδή όλα τα x, για τα οποία ισχύει: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Τώρα η σύνθεση $g \circ f$ δίνεται από τη σχέση:

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[\sqrt{x}\right] = \sqrt{x} + 1.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}_0^+$ και αυτό της g είναι το $\mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι όλα τα $x \geq 0$, για τα οποία $f(x) = \sqrt{x}$ είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή, $x \geq 0$.

<u>Αλγεβρικές πράξεις με συναρτήσεις</u>

Έστω ότι έχουμε δυο συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}$, τότε ορίζονται οι πράξεις:

1. Το άθροισμα $f+g$ που δίνεται από τη σχέση:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού των f και g.

2. Η διαφορά $f-g$ που δίνεται από τη σχέση:

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού των f και g.

3. Το γινόμενο $f \cdot g$ που δίνεται από τη σχέση:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού των f και g.

4. Το πηλίκο f/g που δίνεται από τη σχέση:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού των f και g, για τα

οποία $g(x) \neq 0$.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $f(x) = 3x - 1$ και $g(x) = x^2 + 3x + 3$, να βρεθούν το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο αυτών, όπως δείχνεται πιο πάνω.

<u>Λύση</u>: Προφανώς, το πεδίο ορισμού των δυο αυτών συναρτήσεων είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έτσι έχουμε:

Το άθροισμα, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x-1) + \left(x^2 + 3x + 3\right) \Rightarrow$

$(f+g)(x) = x^2 + 6x + 2$. Με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η διαφορά, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(3x-1)-\left(x^2+3x+3\right)\Rightarrow$

$(f-g)(x)=-x^2-4$. Με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Το γινόμενο, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(3x-1)\cdot\left(x^2+3x+3\right)\Rightarrow$

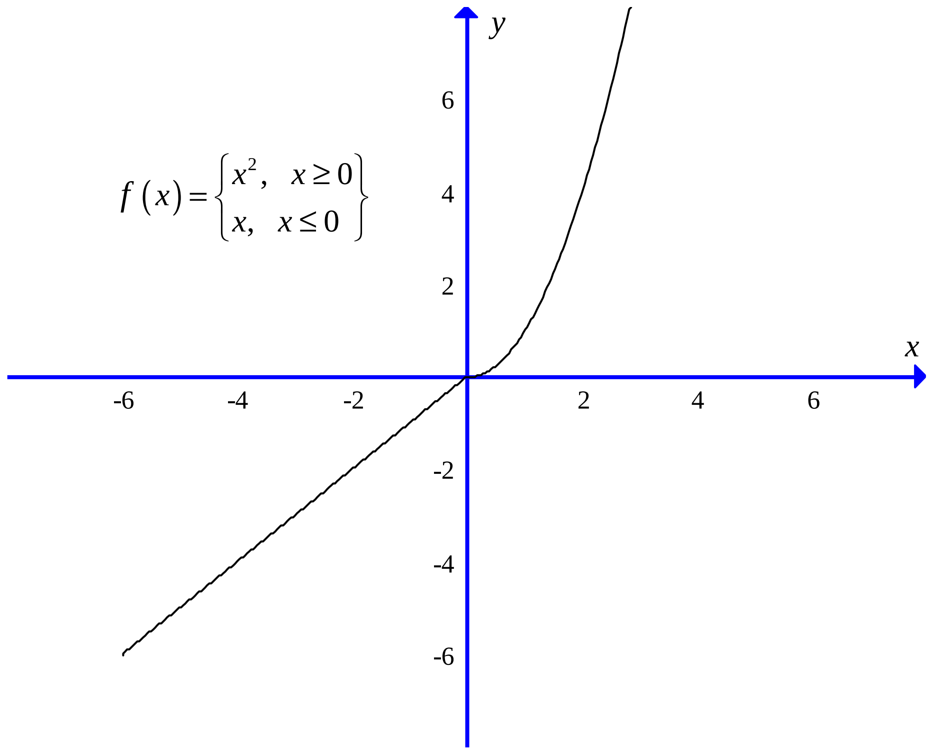
$(f\cdot g)(x)=3x^3+8x^2+6x-3$. Με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Το πηλίκο, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x-3}{x^2+3x+3}$. Με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αφού δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους $x^2+3x+3=0$.
$\left(\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=3^2-4\cdot 1\cdot 3=-3\prec 0\right)$.

<u>Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου</u>

Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ονομάζονται οι συναρτήσεις εκείνες, των οποίων ο τύπος αλλάζει καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές σε διαφορετικά υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ x, & x\prec 0\end{cases}$, το πεδίο ορισμού της οποίας είναι το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 8

β) Η συνάρτηση $g(r)=\begin{cases}3r-1, & r\succ 2\\ r^2-4r+7, & r\prec -2\end{cases}$.

Το πεδίο ορισμού της πιο πάνω συνάρτησης είναι το σύνολο:

$$D(g)=(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty).$$

γ) $\phi(t)=\begin{cases}-t, & t\prec 0\\ 2, & 0\le t\prec 1\\ t^2, & t\ge 1\end{cases}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Μονοτονία συναρτήσεων

Α) Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $y=f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$ και πεδίο τιμών $R(f)$. Θα λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα υποσύνολο A του $D(f)$ όταν, για κάθε $x_1,\ x_2\in A$ με $x_1\prec x_2$, ισχύει:

$$f(x_1)\prec f(x_2).$$

Δηλαδή, καθώς αυξάνουν οι τιμές του $x\in A$, αυξάνουν οι αντίστοιχες τιμές στο πεδίο τιμών της f.

Στην περίπτωση που ισχύει $f(x_1)\le f(x_2)$ παραπάνω, λέμε ότι η f είναι απλά αύξουσα.

Β) Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $y=f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$ και πεδίο τιμών $R(f)$. Θα λέμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα υποσύνολο A του $D(f)$ όταν, για κάθε $x_1,\ x_2\in A$ με $x_1\prec x_2$, ισχύει:

$$f(x_1)\succ f(x_2).$$

Δηλαδή, καθώς αυξάνουν οι τιμές του $x\in A$, ελαττώνονται οι αντίστοιχες τιμές στο πεδίο τιμών της f.

Στην περίπτωση που ισχύει $f(x_1)\ge f(x_2)$ παραπάνω, λέμε ότι η f είναι απλά φθίνουσα.

Γνησίως μονότονη ονομάζεται μια συνάρτηση όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, ενώ στην περίπτωση που μια συνάρτηση είναι απλά αύξουσα ή φθίνουσα, τότε ονομάζεται απλά μονότονη.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται τμηματικά γνησίως μονότονη, (αντίστοιχα τμηματικά μονότονη) σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν το γράφημά της δύναται να χωριστεί σε επί μέρους τμήματα πεπερασμένου πλήθους, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα ή φθίνουσα) σε κάθε ένα από αυτά.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ είναι τμηματικά γνησίως μονότονη, γιατί είναι γνησίως φθίνουσα για όλα τα $x \in (-\infty, \ 0]$ και γνησίως αύξουσα για όλα τα $x \in [0, \ +\infty)$.

Τέλος, μια συνάρτηση είναι σταθερή αν για όλες τις τιμές του x το y δεν μεταβάλλεται, π.χ. η συνάρτηση $y = f(x) = c$, όπου c είναι μια σταθερά.

Περιοδικές συναρτήσεις

Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$, για την οποία υπάρχει ακέραιος αριθμός ρ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in D(f)$, $x + \rho \in D(f)$ και ισχύει:

$$f(x+\rho) = f(x), \ \ \forall x \in D(f),$$

ονομάζεται περιοδική, περιόδου ρ. (Το σύμβολο $\forall$ σημαίνει "για κάθε").

Ο μικρότερος θετικός αριθμός ρ για τον οποίο ισχύει η πιο πάνω σχέση ονομάζεται κύρια περίοδος της f.

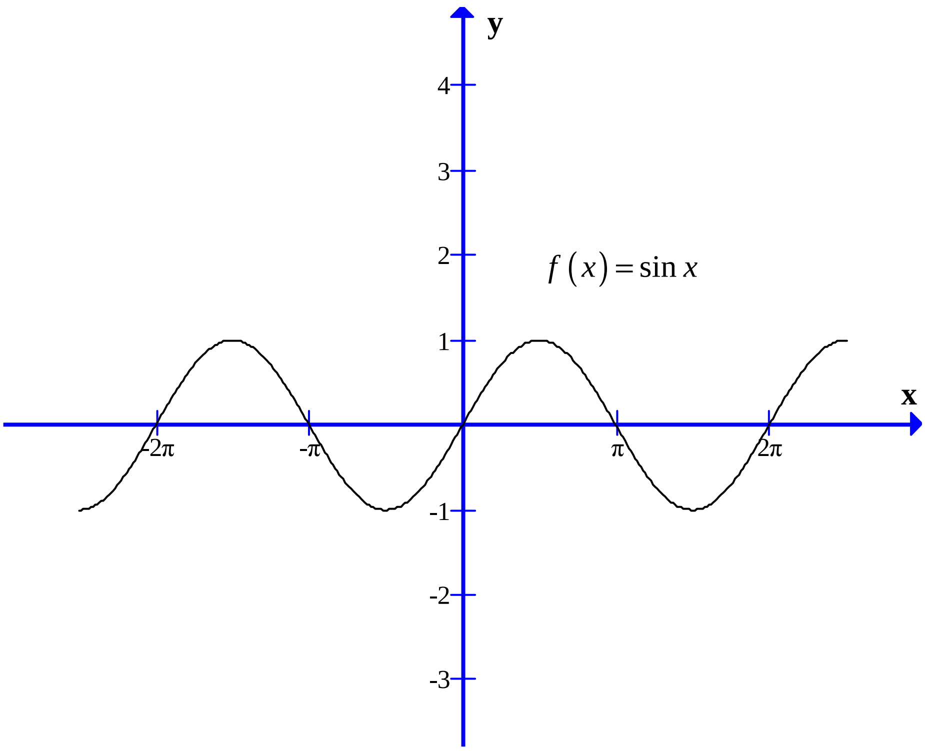
Παραδείγματα: α) Η συνάρτηση $y = f(x) = sinx$ (ημίτονο μια γωνίας x) είναι μια περιοδική συνάρτηση, με κύρια περίοδο $\rho = 2\pi$, αφού

$$f(x+2\pi) = sin(x+2\pi) = sinx.$$

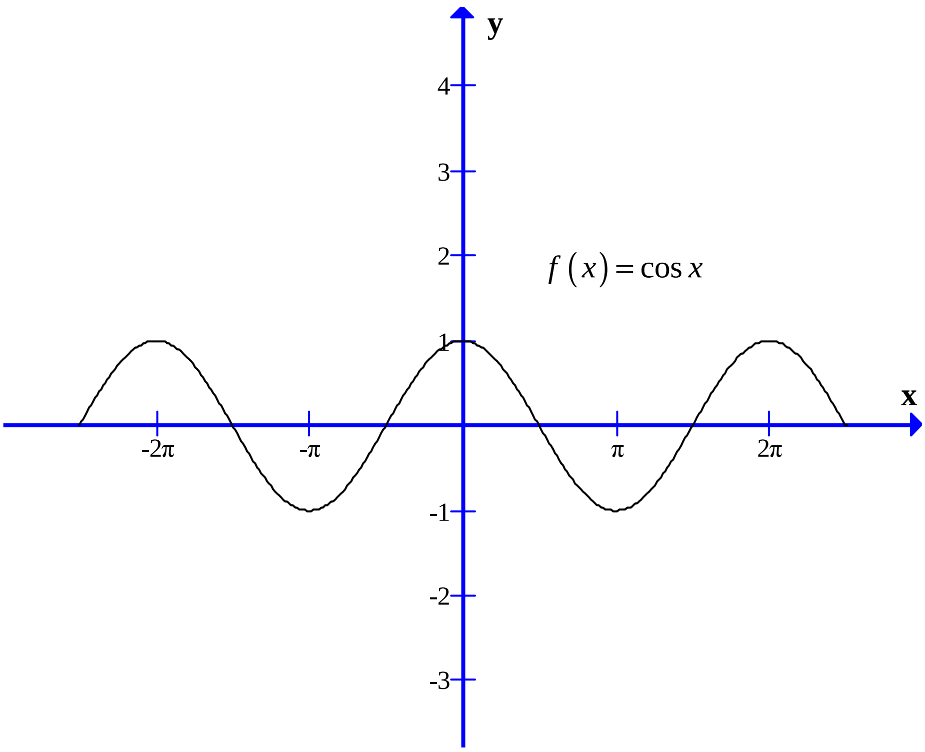
Γενικά, η συνάρτηση "ημίτονο" μιας γωνίας είναι περιοδική με περίοδο $2k\pi$, όπου $k = \ldots \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

β) Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $y = f(x) = cosx$ (συνημίτονο μια γωνίας x). Γιατί;

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τη γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο $(sinx)$ και συνημίτονο $(cosx)$ μιας γωνίας x.



Σχήμα 9



Σχήμα 10

1.5 Ασκήσεις

1. Να γίνει το διάγραμμα των διαστημάτων: α) $-3 \prec x \prec 5$, β) $2 \le x \le 6$, γ) $x \succ 5$, δ) $x \le 2$, ε) $|x| \prec 2$, στ) $|x| \succ 3$, ζ) $|x-3| \prec 1$.

2. Αν $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$, να υπολογιστούν τα $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(1/x\right)$, $f(x+h)$.

3. Αν $g(x) = 2^x$, να δειχθεί ότι α) $g(x+3) - g(x-1) = \dfrac{15}{2} g(x)$,

β) $\dfrac{g(x+3)}{g(x-1)} = g(4)$.

4. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των εξής παραστάσεων: α) $y = \sqrt{4-x^2}$,

β) $y = \sqrt{x^2-16}$, γ) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, δ) $q(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$, ε) $\psi(x) = \dfrac{x}{x^3+4}$,

στ) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x \succ 2 \\ x, & x \le 2 \end{cases}$, ζ) $h(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$, η) $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

5. Αν $f(x) = 5x^2 - 2$ και $g(x) = \sqrt{10-x^2}$ να υπολογιστούν τα

α) $(f \circ g)(-1)$, β) $(g \circ f)(2)$, γ) $(f \circ f)(0)$.

6. Πως μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $y = \left(x^2+2x+3\right)^3$ ως σύνθεση δυο άλλων συναρτήσεων $(f \circ g)$;

7. Να γίνει το γράφημα των συναρτήσεων: α) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \prec x \le 3 \\ 4, & 3 \prec x \le 5 \\ x-1, & x \succ 5 \end{cases}$,

β) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & x \prec 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1. \\ 1/x^2, & x \succ 1 \end{cases}$

8. Να περιγραφεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση της άσκησης 7 (α) πιο πάνω.

9. Αν $f(x) = x^3$ και $g(x) = x + 3$ να υπολογιστούν τα α) $(f+g)(x)$, β) $(f-g)(x)$, γ) $(f \cdot g)(x)$, δ) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ και τα αντίστοιχα πεδία ορισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.2 Όριο συνάρτησης

Από τον ορισμό της συνάρτησης γνωρίζουμε ότι, καθώς αλλάζει η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, αλλάζει αντίστοιχα και η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή αλλάζει η τιμή της ίδιας της συνάρτησης.
Ας δούμε μέσου ενός απλού, αλλά πολύ ενδιαφέροντος παραδείγματος τι μπορεί να προκύψει με τη μεταβολή μιας συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, της οποίας οι μεταβολές στην τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x θυμίζει αυτό που συμβαίνει όταν σε ένα κλάσμα μεταβάλλεται ο παρανομαστής του. Γνωρίζουμε ότι αν ο αριθμητής ενός κλάσματος παραμένει σταθερός , τότε:

- Αν ο παρανομαστής μεγαλώνει , το κλάσμα μικραίνει.
- Αν ο παρανομαστής μικραίνει, το κλάσμα μεγαλώνει.

Έτσι στην πιο πάνω συνάρτηση αν θεωρήσουμε ότι η τιμή του x αυξάνει, έτσι ώστε να είναι μεγαλύτερη από κάθε αριθμό που μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικώς, τότε λέμε ότι <u>αυξάνει απεριόριστα</u>, ή ότι <u>τείνει</u> προς το <u>άπειρο</u> (∞).

Συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ μπορεί να παρασταθεί με $\frac{1}{\infty}$ που γίνεται μια απείρως μικρή ποσότητα, μικρότερη από κάθε πεπερασμένο αριθμό, ο οποίος μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικώς. Αυτό συμβολίζεται με το μηδέν (0). Δηλαδή εδώ το μηδέν το θεωρούμε όχι ως αριθμό, αλλά σαν ένα απείρως μικρό μέγεθος.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ τείνει στο 0 όταν η x τείνει στο ∞ και γράφουμε:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

και διαβάζεται: το όριο της συνάρτησης $f(x)$, καθώς η x τείνει στο ∞, ισούται με μηδέν.

Εργαζόμενοι κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

και λέμε ότι στην περίπτωση αυτή το όριο της συνάρτησης $f(x)$, καθώς η x τείνει στο 0, δεν υπάρχει.

Δεν είναι μόνο το 0 ή το ∞ προς τα οποία μπορεί να "τείνει" η x ώστε να αναζητούμε το όριο μιας δοσμένης συνάρτησης, αλλά και άλλοι πραγματικοί αριθμοί.
Προς αυτή την κατεύθυνση ας δούμε ένα ακόμη απλό παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$. Όταν η x είναι "κοντά" στον αριθμό 2, αλλά όχι ίση με 2, δηλαδή κάποιες τιμές της είναι μικρότερες του 2 και κάποιες μεγαλύτερες από 2, τότε όπως φαίνεται στον πίνακα παρακάτω, είτε η x πλησιάζει τον αριθμό 2 από τα <u>αριστερά</u> $(x \prec 2)$ είτε από τα <u>δεξιά</u> $(x \succ 2)$, οι τιμές της f πλησιάζουν έναν αριθμό, τον 3.

$(x \prec 2)$	$f(1{,}7) = 2{,}4$	$f(1{,}8) = 2{,}6$	$f(1{,}9) = 2{,}8$	$f(1{,}999) = 2{,}998$
$(x \succ 2)$	$f(2{,}3) = 3{,}6$	$f(2{,}2) = 3{,}4$	$f(2{,}1) = 3{,}2$	$f(2{,}001) = 3{,}002$

Με άλλα λόγια, το όριο της $f(x)$ καθώς η x τείνει στο 2 από τα αριστερά είναι ίσο με 3 και γράφουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3. \qquad (*)$$

Ακόμη, το όριο της $f(x)$ καθώς η x τείνει στο 2 από τα δεξιά είναι ίσο με 3 και γράφουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3. \qquad (**)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς η x τείνει στο 2 και είναι ίσο με 3.
Γράφουμε δε

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3.$$

Όρια της μορφής (*) και (**) παραπάνω, ονομάζονται **πλευρικά όρια.**

Γενικά, το όριο μιας συνάρτησης $y = f(x)$ καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή $x \to a$, υπάρχει αν και μόνον αν τα δυο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους.

Συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \quad L \in \mathbb{R}.$$

Στο παράδειγμα του $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$, θα μπορούσε ίσως να ισχυριστεί κάποιος πως το όριο της δοσμένης συνάρτησης δύναται να υπολογιστεί από την τιμή της στο συγκεκριμένο σημείο, δηλαδή εδώ το 2, ήτοι:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα, όπως μας δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα:

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}.$$

Εδώ έχουμε ότι $g(2) = 1$, ενώ το όριο της συνάρτησης καθώς η x τείνει στο 2 από αριστερά ή από τα δεξιά ισούται με 3, δηλαδή

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3.$$

2.2 Ιδιότητες των ορίων

Για το όριο συναρτήσεων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Αν $f(x) = c$, δηλαδή η f είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό n.

   Αν $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ και $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, όπου $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, τότε

3. $\lim_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$. (Η ιδιότητα αυτή ισχύει για πεπερασμένο αριθμό αθροισμάτων ή διαφορών συναρτήσεων).

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to a}g(x)\right]=L_1\cdot L_2$.

5. $\lim\limits_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\cdot L_1$, όπου c μια σταθερά.

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$, αν $L_2\neq 0$.

7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$, αν $\sqrt[n]{L_1}$ ορίζεται.[2]

<u>Παραδείγματα</u>: Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x\right)$, β) $\lim\limits_{s\to 3}\left(s^3-s\right)$, γ) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-x+1\right)$, δ) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x+1)(x-3)\right]$,
στ) $\lim\limits_{x\to -2}3x^3$, ζ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{4x-1}$, η) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+4}$, θ) $\lim\limits_{t\to 4}\sqrt{t^2+1}$, ι) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+7}$,
κ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-4}{h}$, λ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$, μ) $\lim\limits_{x\to c}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)$.

<u>Λύση</u>: α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}x=2^2+2=6$.

β) $\lim\limits_{s\to 3}\left(s^3-s\right)=\lim\limits_{s\to 3}s^3-\lim\limits_{s\to 3}s=3^3-3=24$.

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-x+1\right)=\lim\limits_{x\to -1}x^3-\lim\limits_{x\to -1}x+\lim\limits_{x\to -1}1=(-1)^3-(-1)+1=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x+1)(x-3)\right]=\left[\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to 2}(x-3)\right]=$

$=\left[\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3\right]=[2+1]\cdot[2-3]=-3$.

στ) $\lim\limits_{x\to -2}3x^3=3\lim\limits_{x\to -2}x^3=3(-2)^3=-24$.

ζ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{4x-1}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

---

[2] Αν θέλουμε εδώ να είμαστε πιο ακριβείς και "αυστηροί" θα πρέπει η $\sqrt[n]{f(x)}$ να ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a.

η) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+x-3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+4\right)} = \dfrac{2+1-3}{1+4} = \dfrac{0}{5} = 0$.

θ) $\lim\limits_{t\to 4}\sqrt{t^2+1} = \sqrt{\lim\limits_{t\to 4}\left(t^2+1\right)} = \sqrt{2^4+1} = \sqrt{17}$.

ι) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+7} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+7\right)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 3}x^3+\lim\limits_{x\to 3}7} = \sqrt[3]{2^3+0}$

$$= \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

κ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(2+h\right)^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^2+4h+h^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\left(4+h\right)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left(4+h\right) = \lim_{h\to 0}4+\lim_{h\to 0}h = 4+0 = 4.$$

λ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\left(x-1\right) = -1-1 = -2$.

μ) $\lim\limits_{x\to c}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right) =$

$$= \lim_{x\to c}a_0 + a_1\lim_{x\to a}x + a_2\lim_{x\to a}x^2+\cdots+a_n\lim_{x\to a}x^n$$

$$= a_0+a_1\cdot c+a_2\cdot c^2+\cdots+a_n\cdot c^n = f\left(c\right).$$

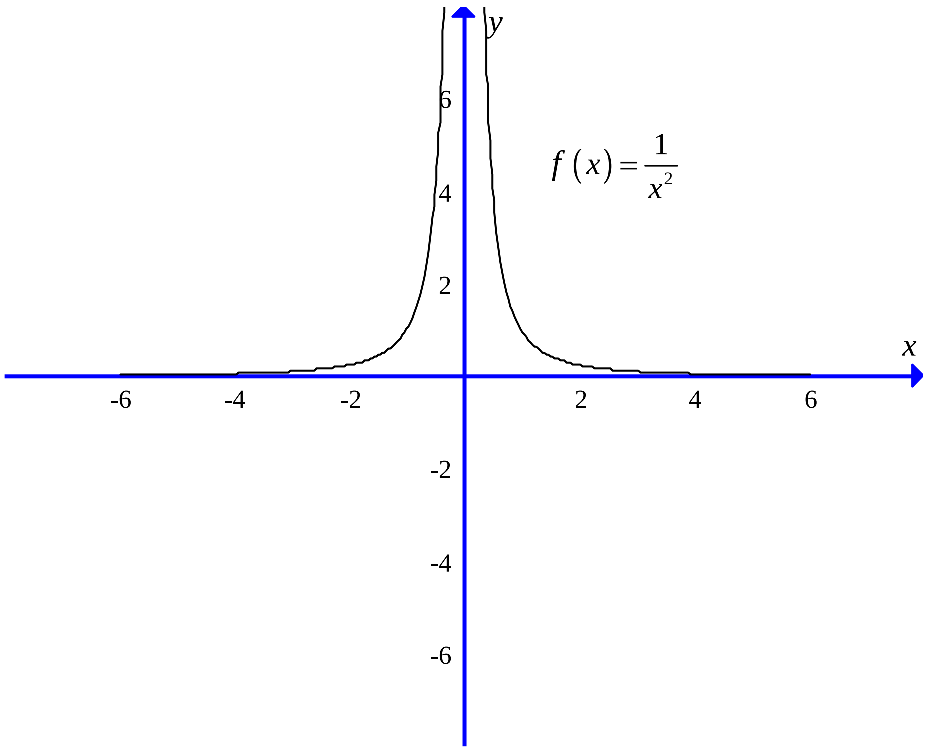
Από το τελευταίο παράδειγμα πιο πάνω βλέπουμε ότι, αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε

$$\lim_{x\to c} f\left(x\right) = f\left(c\right).$$

Ας δούμε τώρα μια άλλη περίπτωση, αυτή της συνάρτησης $y = f\left(x\right) = 1/x^2$, $x \neq 0$, κοντά στο σημείο $x = 0$. Στον πίνακα παρακάτω βλέπουμε τις τιμές της συνάρτησης, καθώς η $x \to 0$ από τα δεξιά και από τα αριστερά.

x	± 1	$\pm 0,5$	$\pm 0,1$	$\pm 0,01$	$\pm 0,001$
y	1	4	100	10.000	1.000.000

Το γράφημα της συνάρτησης είναι:



Σχήμα 1

Τόσο από τον πίνακα, όσο και από το γράφημα της συνάρτησης, είναι φανερό πως αυτή αυξάνει χωρίς όριο, καθώς η $x \to 0$. Στην περίπτωση αυτή, το όριο της συνάρτησης δεν υπάρχει, αφού:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = \infty .$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι για τη γνωστή συνάρτηση $y = f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, καθώς η $x \to 0$ από τα δεξιά η $f(x)$ γίνεται θετικά άπειρη, δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty ,$$

ενώ καθώς η $x \to 0$ από τα αριστερά η $f(x)$ γίνεται αρνητικά άπειρη, δηλαδή,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty .$$

Και από τις δυο περιπτώσεις έχουμε ότι το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Για την ίδια συνάρτηση $y = f(x) = 1/x,\ \ x \neq 0$, όμως, καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή γίνεται απείρως "μικρή" ή απείρως "μεγάλη", δηλαδή καθώς η $x \to -\infty$ ή $x \to \infty$, η $f(x)$ μηδενίζεται, δηλαδή

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

<u>Παραδείγματα</u>: Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2}{x+1}$, β) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$, γ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$, δ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{(x-5)^2}$, ε) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x+3}{2x^3+3x-1}$, στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x}{x^4+2x^2+1}$, ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x^2}{x}$.

<u>Λύση</u>:

α) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2}{x+1}$, καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή x πλησιάζει το σημείο -1 από τα δεξιά, ο παρονομαστής $x+1$ πλησιάζει το 0 και είναι πάντοτε θετικός. Αφού λοιπόν διαιρούμε το 2 δια μια θετική ποσότητα που τείνει προς το 0, το κλάσμα $\dfrac{2}{x+1}$ γίνεται απείρως "μεγάλο", δηλαδή $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2}{x+1} = \infty$.

β) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}$. Αφού $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2} = \infty$ συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$ δεν υπάρχει.

γ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$.

δ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{(x-5)^2}$, καθώς η x γίνεται απείρως μεγάλη ποσότητα, το ίδιο συμβαίνει και με την $x-5$ και αφού η τρίτη δύναμη ενός πολύ μεγάλου αριθμού είναι επίσης μεγάλος αριθμός, πρέπει $(x-5)^3 \to \infty$. Διαιρώντας το 4 δια πολύ μεγάλο αριθμό, παίρνουμε ως αποτέλεσμα το 0, ήτοι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x-5)^2}=0.$$

Με το τελευταίο αυτό παράδειγμα βλέπουμε ότι όρια συναρτήσεων της μορφής $f(x)=1/x^r$, $r\succ 0$ καθώς η $x\to\infty$, αφού ο παρονομαστής γίνεται απείρως μεγάλη ποσότητα, μηδενίζονται. Δηλαδή

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0,\quad \forall r\succ 0.$$

ε) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x+3}{2x^3+3x-1}$, σε όρια αυτής της μορφής, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή δια τη μεγαλύτερη δύναμη της x, εδώ δια x^3 και έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+2x+3}{2x^3+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{8x^2+2x+3}{x^3}}{\dfrac{2x^3+3x-1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{8}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{8\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{8(0)+2(0)+3(0)}{2+3(0)-0}=0.$$

στ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2-5x}{x^4}}{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0-0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x^2}{x}$, εδώ δεν είναι απαραίτητο να διαιρέσουμε δια x^2, αφού μπορούμε να απλοποιήσουμε το κλάσμα και να πάρουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}10x=-\infty$, δηλαδή το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα από τα σημαντικότερα όρια που είναι το ακόλουθο:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

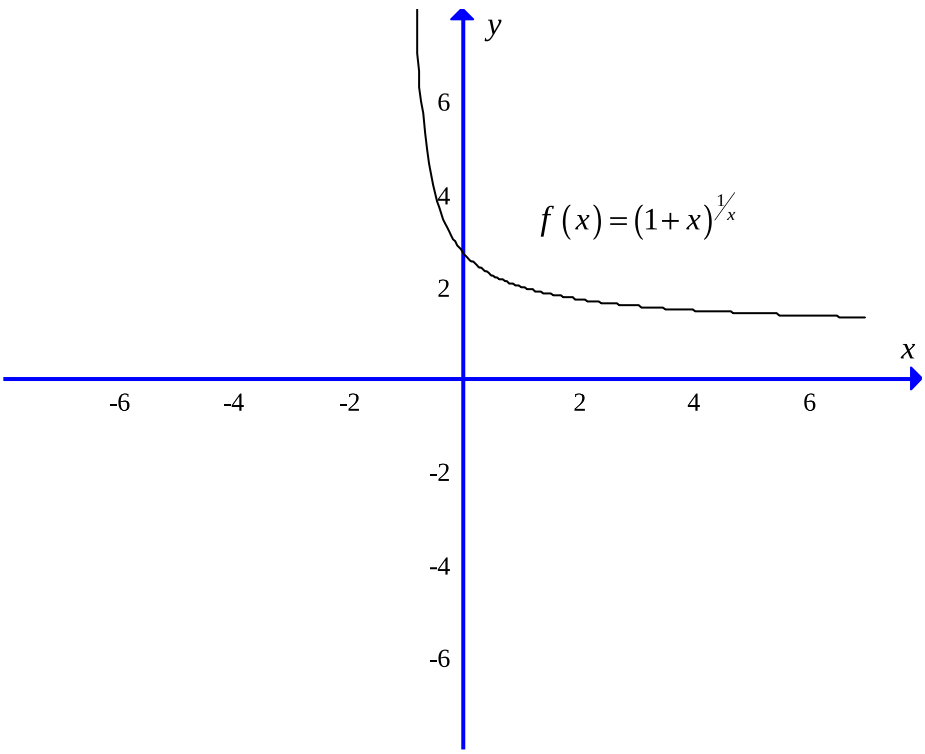
Στο πίνακα παρακάτω βλέπουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)=(1+x)^{1/x}$, καθώς $x\to 0$.

x	$(1+x)^{1/x}$	x	$(1+x)^{1/x}$
0,5	2,2500000	-0,5	2,2500000
0,1	2,5937425	-0,1	2,5937425
0,01	2,7048138	-0,01	2,7048138
0,001	2,7169241	-0,001	2,7169241
0,0001	2,7181486	-0,0001	2,7181486

Γίνεται φανερό πως καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή $x\to 0$, από τα δεξιά και από τα αριστερά, το όριο $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ υπάρχει και είναι περίπου ίσο με 2,7182…, που είναι ο γνωστός άρρητος αριθμός e.
Δηλαδή,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Βλέπουμε πιο κάτω το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=(1+x)^{1/x}$.



Σχήμα 2

2.3 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

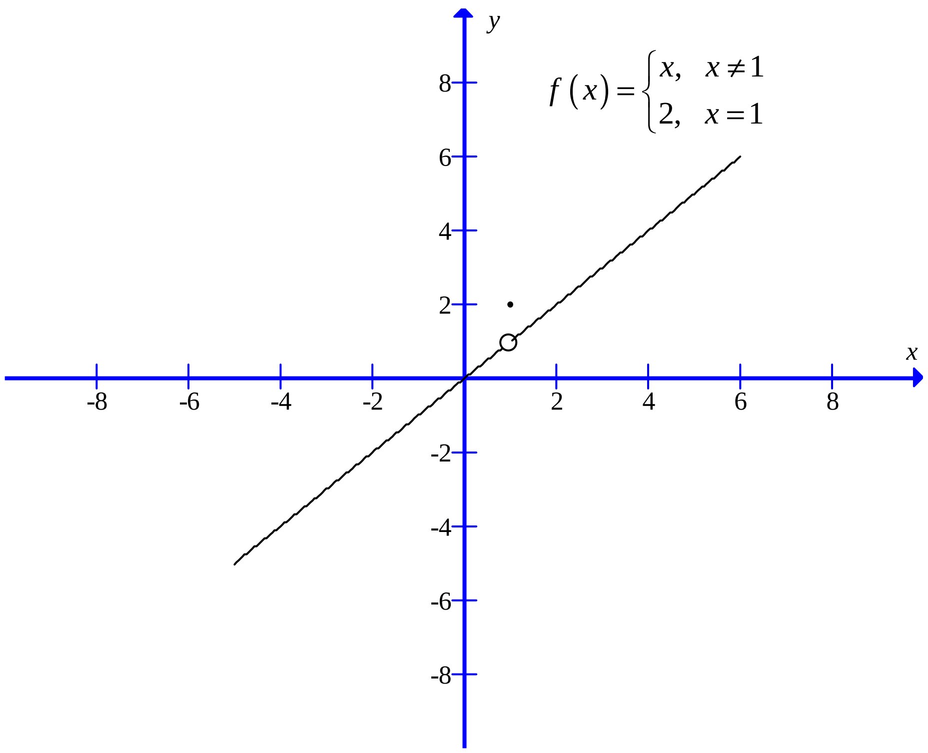
α) $\lim_{x\to 3^+}(x-2)$, β) $\lim_{x\to 0^-}\frac{6x}{x^4}$, γ) $\lim_{x\to\infty}\frac{7}{2x+1}$, δ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3+4x-3}$, ε) $\lim_{x\to 5}\frac{3}{x-5}$,

στ) $\lim_{t\to\infty}(t-1)^3$, ζ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(4x-1)^3}$, η) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x^6-x+4}$, θ) $\lim_{x\to-2^+}\frac{2x}{4-x^2}$, ι) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^3}{x^3-1}$, κ) $\lim_{x\to\infty}\frac{7-2x-x^4}{9-3x^4+2x^2}$, λ) $\lim_{r\to\infty}\frac{r^3}{r^2+1}$.

2.4 Συνέχεια συνάρτησης

Το παρακάτω γράφημα της συνάρτησης πολλαπλού τύπου:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$$



Σχήμα 3

αποτελείται από μια ευθεία γραμμή, η οποία στο σημείο $x=1$ έχει ένα "κενό" και από ένα σημείο, στη θέση $(1,\ 2)$.

Ας δούμε τώρα το όριο αυτής της συνάρτησης καθώς η $x \to 1$. Είναι προφανές πως καθώς η $x \to 1$ τόσο από τα δεξιά, όσο και από τα αριστερά, το όριο της συνάρτησης υπάρχει και είναι ίσο με 1, δηλαδή

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

Για την ίδια όμως συνάρτηση έχουμε ότι $f(1)=2$, δηλαδή η τιμή της στο σημείο $x=1$ είναι διάφορη από το όριό της καθώς η $x \to 1$. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ασυνεχής** στο σημείο αυτό, εδώ το $x=1$.

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα.

<u>Ορισμός 1</u>: Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής** σε ένα σημείο $x=a$ αν και μόνον αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Η $f(x)$ ορίζεται στο σημείο $x=a$, δηλαδή $a \in D(f)$,
- Το όριο $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει.
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

<u>Ορισμός 2</u>: Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **ασυνεχής** σε ένα σημείο $x=a$ αν και μόνον αν <u>δεν</u> είναι **συνεχής** στο σημείο αυτό.

<u>Ορισμός 3</u>: Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα διάστημα** αν και μόνον αν είναι συνεχής σε <u>κάθε</u> σημείο του διαστήματος αυτού.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^2$, είναι συνεχής στο διάστημα π.χ. $[2,\ 5]$.

Για την ακρίβεια, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, για μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ και αφού $D(f)=\mathbb{R}$, η $f(x)$ είναι συνεχής σε <u>κάθε</u> σημείο, άρα και σε <u>κάθε</u> διάστημα. Δηλαδή μια πολυωνυμική συνάρτηση είναι <u>συνεχής</u> <u>παντού</u>.

Ορισμός 4: Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **απείρως ασυνεχής** (ή έχει μια **άπειρη ασυνέχεια**) σε ένα σημείο $x=a$ αν και μόνον αν ένα τουλάχιστον από τα δυο πλευρικά της όρια είναι ∞ ή $-\infty$, καθώς η $x \to a$.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, πολλές είναι οι χρήσιμες ιδιότητες που έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις σε αντίθεση με τις ασυνεχείς.

Παράδειγμα 1ο: α) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ δεν ορίζεται στο σημείο $x=0$ και επί πλέον, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$. Κατά συνέπεια είναι απείρως ασυνεχής στο σημείο $x=0$.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3+2x-1}{x^2-4}$ είναι ασυνεχής στα σημεία $x=\pm 2$, αφού ο παρονομαστής είναι 0, τόσο για $x=2$, όσο και για $x=-2$. Για όλα τα άλλα σημεία του $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι συνεχής.

Για την ακρίβεια οι ρητές συναρτήσεις είναι ασυνεχείς μόνον στα σημεία όπου ο παρονομαστής τους μηδενίζεται.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+6, & x\ge 3, \\ x^2, & x\prec 3 \end{cases}$ θα μπορούσε ίσως να έχει πρόβλημα συνέχειας στο σημείο $x=3$. Όμως $f(3)=3+6=9$ και ακόμη, καθώς η $x\to 3^+$, η $f(x)\to 3+6=9$ και, καθώς η $x\to 3^-$, η $f(x)\to 3^2=9$. Συνεπώς η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x=3$, καθώς και σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.5 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

(i) Αν f και g είναι συνεχής συναρτήσεις σε ένα σημείο $x=a$ του πεδίου ορισμού τους, τότε ισχύουν τα εξής:

- Η συνάρτηση $f\pm g$ είναι συνεχής στο $x=a$.
- Η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι συνεχής στο $x=a$.
- Η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ με $g\ne 0$ είναι συνεχής στο $x=a$.

(ii) Όπως ήδη προαναφέραμε, μια πολυωνυμική συνάρτηση:

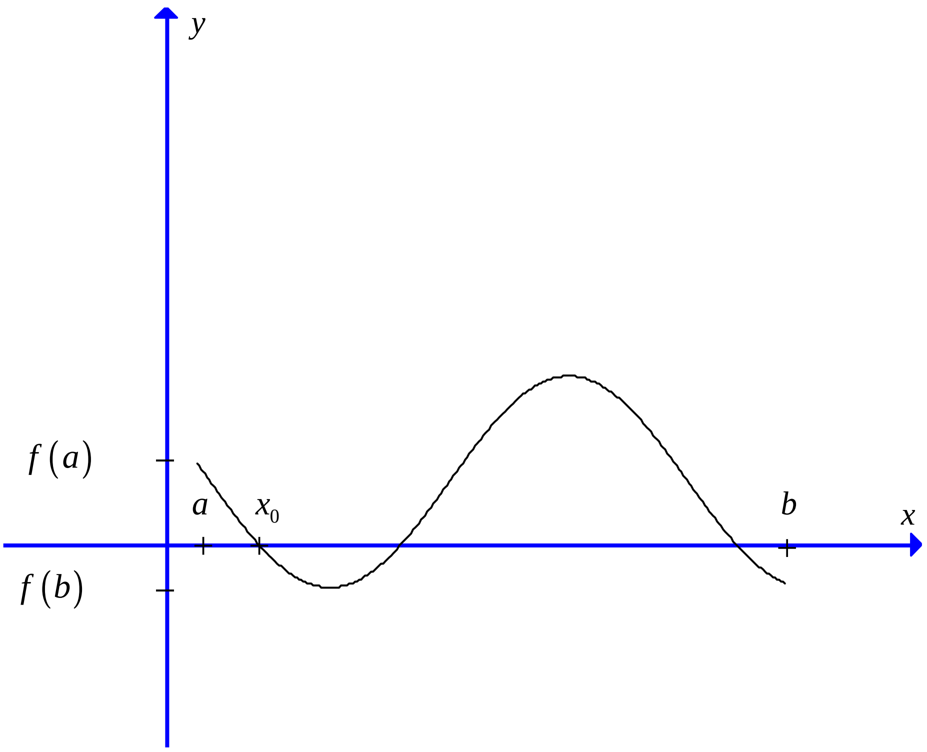
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,\quad a_n\neq 0,$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.

(iii) Μια ρητή συνάρτηση $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις, είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της εκτός από τα σημεία εκείνα όπου ενδεχομένως μηδενίζεται η $g(x)$.

(iv) Αν μια συνάρτηση $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,\ b]$ και $f(a)\cdot f(b)\prec 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 στο ανοικτό διάστημα $(a,\ b)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Η τελευταία αυτή, σημαντική ιδιότητα, μας λέει ότι το γράφημα της συνάρτησης f, για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις παραπάνω, τέμνει των άξονα των x σε <u>ένα</u> <u>τουλάχιστον</u> σημείο x_0. (Βλ. παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 4

<u>Παράδειγμα 2^{o}</u>: Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x+2}{5}$, β) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4}$, γ) $q(x)=\dfrac{x^4}{x^4-1}$, δ) $p(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ε) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x-2}, & x\succ 0,\\ 4-x, & x\le 0\end{cases}$.

Λύση: α) $f(x)=\dfrac{x+2}{5}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{2}{5}$, αυτή είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση και συνεπώς είναι συνεχής παντού.

β) $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4}$, η συνάρτηση αυτή είναι ρητή και ο παρονομαστής της, x^2+4 , δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο των πραγματικών αριθμών. Άρα είναι συνεχής παντού.

γ) $q(x)=\dfrac{x^4}{x^4-1}$, ο παρονομαστής, εδώ x^4-1, έχει ρίζες το ± 1, δηλαδή μηδενίζεται για $x=1$ και $x=-1$. Κατά συνέπεια η συνάρτηση είναι ασυνεχής στα δυο αυτά σημεία.

δ) $p(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, όπως στο (β) πιο πάνω.

ε) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x-2}, & x\succ 0,\\ 4-x, & x\le 0\end{cases}$.

Η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται όταν $x=2$, αφού μηδενίζεται ο παρονομαστής του ρητού μέρους της συνάρτησης. Συνεπώς είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό.

Επίσης,

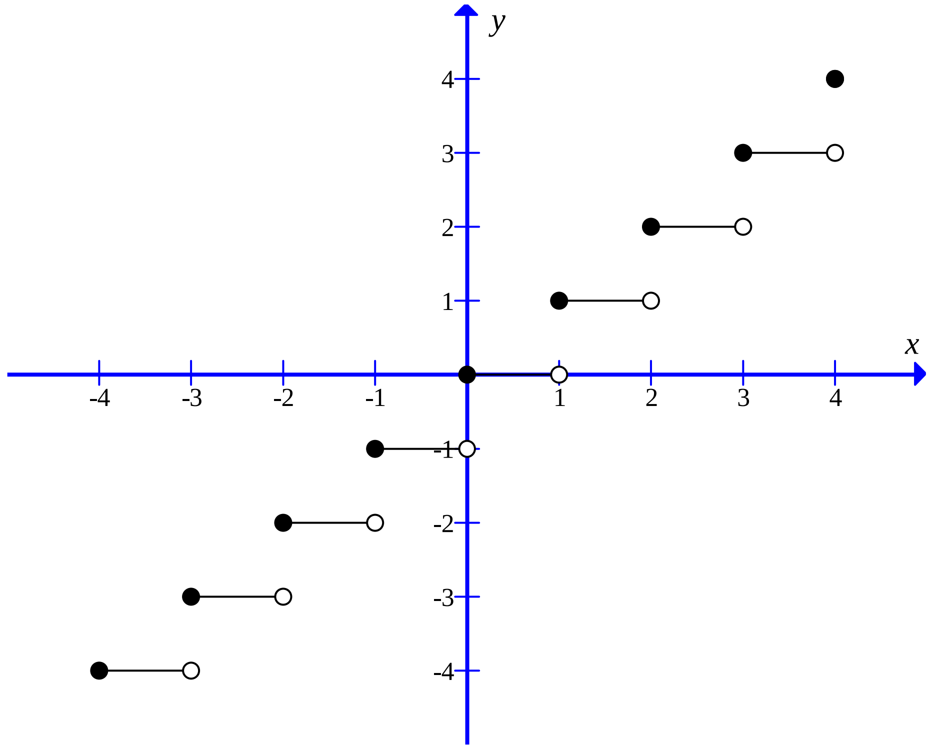
$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\dfrac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=4$. Άρα υπάρχει μια ακόμη ασυνέχεια της συνάρτησης στο σημείο $x=0$.

Παράδειγμα 3^o: Η συνάρτηση $f(x)=[x]$ ορίζεται ως "το ακέραιο μέρος της x" και είναι: $[x]=n,\ n\le x\prec n+1$, όπου n ένας ακέραιος αριθμός και x ένας πραγματικός.

Για παράδειγμα $[5]=5,\ \ [1,99]=1,\ \ [1/4]=0,\ \ [-3,5]=-4$ κ.λ.π.

Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης αυτής στο διάστημα $-4 \le x \le 4$ και να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειάς της.

<u>Λύση</u>: Οι ασυνέχειες της συνάρτησης, όπως φαίνεται και στο σχήμα πιο κάτω, βρίσκονται στα σημεία: $x=0,\ \ \pm 1,\ \ \pm 2,\ \ \pm 3,\ \ 4$.



Σχήμα 5

2.6 Εφαρμογές της συνέχειας συναρτήσεων σε ανισότητες

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ανισότητες και πως μπορούμε να τις επιλύσουμε μέσω της συνέχειας των συναρτήσεων.

Έστω ότι έχουμε να επιλύσουμε την ανισότητα: $x^2+3x-4 \succ 0$.

Η συνάρτηση $f(x)=x^2+3x-4$ είναι πολυωνυμική και έτσι, συνεχής παντού. Ακόμη οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+3x-4=0$ είναι

$$(x-1)(x+4)=0 \Rightarrow x_1=1,\ \ x_2=-4.$$

Οι δυο αυτές ρίζες, είναι τα σημεία τομής του άξονα των x και του γραφήματος της συνάρτησης f, αφού εκεί έχουμε $f(x)=0$ και προσδιορίζουν τα εξής διαστήματα $(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ 1)$ και $(1,\ \infty)$ όπου πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της f.

Στο διάστημα $(-\infty, \; -4)$, η f είναι συνεχής και έτσι θα πρέπει να είναι $f(x) \succ 0$ ή $f(x) \prec 0$, αφού αν άλλαζε πρόσημο, λόγω της συνέχειας της, θα έπρεπε να τέμνει των άξονα των x σε κάποιο σημείο, πράγμα αδύνατον (η f έχει μόνον δυο ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -4$).
Συνεπώς η f είναι ή θετική ή αρνητική στο διάστημα αυτό. Το ίδιο ισχύει και στα άλλα δυο διαστήματα $(-4, \; 1)$ και $(1, \; \infty)$.

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της συνάρτησης f στα τρία διαστήματα , αρκεί να την εξετάσουμε σε ένα μόνο σημείο αυτών των διαστημάτων.

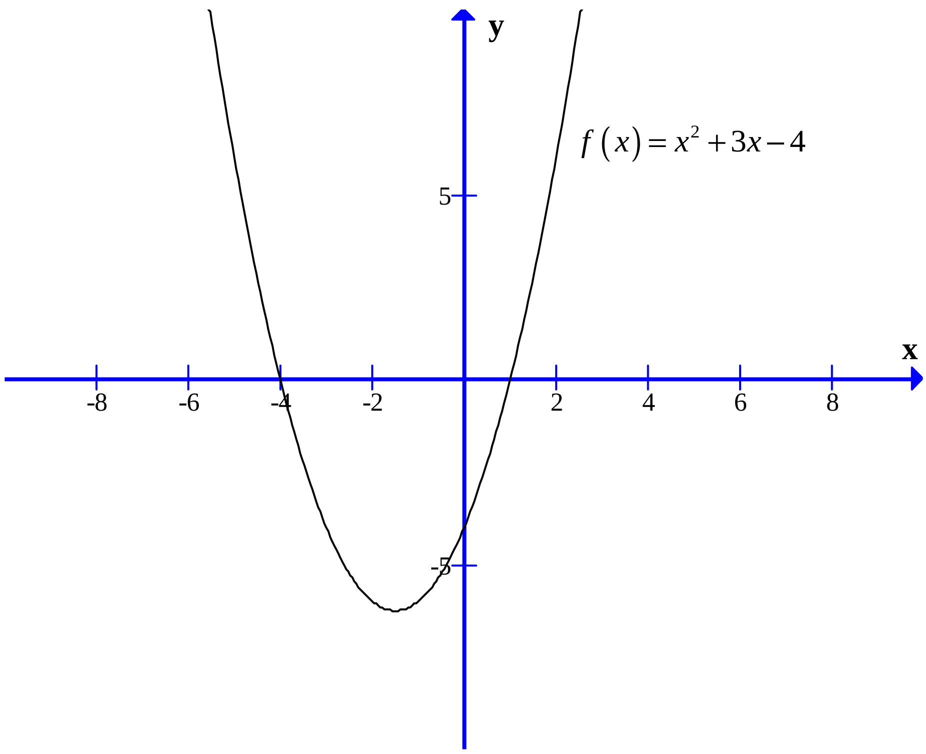
Για το διάστημα $(-\infty, \; -4)$ ας πάρουμε το σημείο -5 και έχουμε:
$f(-5) = 6 \succ 0$. Άρα $f(x) \succ 0$ στο $(-\infty, \; -4)$.

Για το διάστημα $(-4, \; 1)$ ας πάρουμε το σημείο -1 και έχουμε:
$f(-1) = -6 \prec 0$. Άρα $f(x) \prec 0$ στο $(-4, \; 1)$.

Για το διάστημα $(1, \; \infty)$ ας πάρουμε το σημείο 2 και έχουμε:
$f(2) = 6 \succ 0$. Άρα $f(x) \succ 0$ στο $(1, \; \infty)$.

Συνεπώς $x^2 + 3x - 4 \succ 0$ για $x \prec -4$ και $x \succ 1$.

Βλέπουμε στο σχήμα 6 το γράφημα της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + 3x - 4$.



Σχήμα 6

Παράδειγμα: Να λυθεί η ανισότητα $\frac{x^2-6x+5}{x} \geq 0$ και να γίνει το γράφημα της αντίστοιχης συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x}$.

Λύση: $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{x}$.

Οι ρίζες αυτής της συνάρτησης είναι προφανώς οι $x_1=1$ και $x_2=5$. Επί πλέον, έχει ένα σημείο ασυνέχειας που είναι το 0, αφού δεν ορίζεται εκεί.

Τώρα εξετάζουμε το πρόσημο της f στα διαστήματα:
$(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 5)$ και $(5,\ \infty)$, εξετάζοντας τι συμβαίνει στη συνάρτηση σε ένα μόνον σημείο αυτών των διαστημάτων. Ας πάρουμε τα σημεία -1, 1/2, 3 και 6 αντίστοιχα και έχουμε:

Για το -1: $f(-1)=\frac{(-1-1)(-1-5)}{-1}=-12 \prec 0 \Rightarrow f(x) \prec 0$ στο $(-\infty,\ 0)$.

Για το 1/2: $f(1/2)=\frac{(1/2-1)(1/2-5)}{1/2}=9/2 \succ 0 \Rightarrow f(x) \succ 0$ στο $(0,\ 1)$.

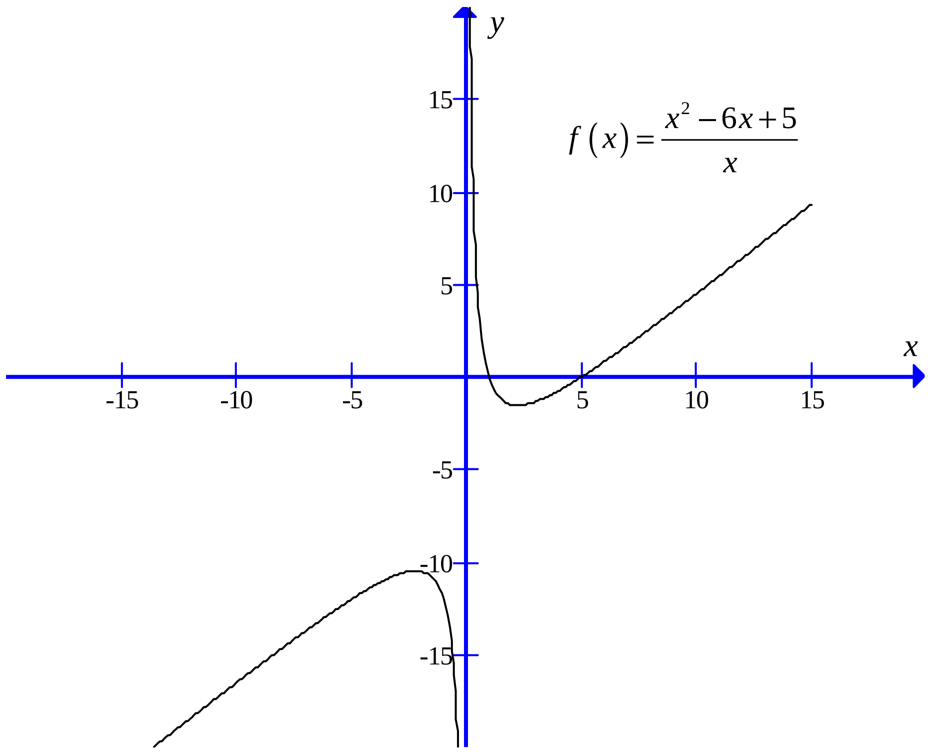
Για το 3: $f(3)=\frac{(3-1)(3-5)}{3}=-4/3 \prec 0 \Rightarrow f(x) \prec 0$ στο $(1,\ 5)$.

Για το 6: $f(6)=\frac{(6-1)(6-5)}{6}=5/6 \succ 0 \Rightarrow f(x) \succ 0$ στο $(5,\ \infty)$.

Συνεπώς $\frac{x^2-6x+5}{x} \geq 0$ για $0 \prec x \leq 1$ και $x \geq 5$. Δηλαδή η ανισότητα επαληθεύεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εντός των διαστημάτων: α) του πεπερασμένου ανοικτού-κλειστού διαστήματος $(0,\ 1]$ και β) του άπειρου διαστήματος $[5,\ \infty)$

Στο επόμενο (σχήμα 7) βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x}$.



Σχήμα 7

2.7 Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων: α) $f(x)=\frac{5x+2}{3}-\frac{7}{x}$,

β) $f(x)=\begin{cases} 10x-3, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x+1}, & x \prec 1 \end{cases}$, γ) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 3, \\ 5, & x=3 \end{cases}$.

2. Το κόστος υπεραστικών τηλεφωνημάτων από Ελλάδα προς Αυστραλία είναι 1,65 € για τα πρώτα τρία λεπτά της ώρας και 0,30 € για κάθε επί πλέον λεπτό ή μέρος αυτού, μετά το πέρας των τριών πρώτων λεπτών.

Αν $y=f(t)$ είναι η συνάρτηση που μας δείχνει το συνολικό ποσό χρέωσης για κάποιο υπεραστικό τηλεφώνημα, διάρκειας t λεπτών, να γίνει η γραφική παράσταση της f για $0 \prec t \leq 5{,}5$ και να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειάς της.

3. Η επόμενη συνάρτηση, δίνει το κόστος ταχυδρομικής αποστολής δεμάτων,

$$c = f(x) = \begin{cases} 15, & 0 \prec x \leq 1, \\ 28, & 1 \prec x \leq 2, \\ 41, & 2 \prec x \leq 3, \\ & \kappa.\tau.\lambda. \end{cases}$$

όπου c είναι το κόστος σε λεπτά του € για x γραμμάρια βάρους κάθε δέματος. Να γίνει το γράφημα αυτής της συνάρτησης στο διάστημα $0 \prec x \leq 6$ και να βρεθούν τα σημεία ασυνέχειάς της εκεί.

4. Να λυθούν οι ανισότητες:

α) $x^2 + 4x - 12 \succ 0$, β) $2x^2 - 6x + 4 \leq 0$, γ) $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$, δ) $x^3 \geq 2x^2$

ε) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \prec 0$, στ) $\dfrac{x(x+5)(x+8)}{3} \prec 0$, ζ) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-8} \geq 0$, η) $\dfrac{4}{x-1} \geq 0$,

θ) $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+3x+2} \geq 0$, ι) $\dfrac{2}{x^2-5x+6} \succ 0$, κ) $\dfrac{x^2-1}{x} \prec 0$, λ) $\dfrac{3}{x^2+6x+8} \leq 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3[ο]

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3.6 Η έννοια της παραγώγου - ορισμοί

Ελάχιστη μεταβολή, h (ή Δx), της τιμής μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x είναι η αλλαγή που γίνεται σ' αυτήν, καθώς αυξάνει ή μειώνεται από μια τιμή $x = x_1$ σε μια άλλη τιμή $x = x_2$. Εδώ έχουμε $h = x_2 - x_1$, απ΄ όπου παίρνουμε: $x_2 = x_1 + h$.

Αν σε μια μεταβλητή x γίνει μια αύξηση (ή μείωση) h, από $x = x_1$ σε $x = x_1 + h$, τότε σε μια συνάρτηση $y = f(x)$ της x, θα γίνει μια αύξηση (ή μείωση) από $f(x_1)$ σε $f(x_1+h) - f(x_1)$, το δε πηλίκο

$$\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}, \qquad (1)$$

(δηλαδή η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης $y = f(x)$ προς τη μεταβολή της τιμής της ανεξάρτητης μεταβλητής x), ονομάζεται η *κατά μέσο όρο αλλαγή* της συνάρτησης στο διάστημα μεταξύ x_1 και $x_1 + h$.

Για παράδειγμα, αν στη μεταβλητή x γίνει μια αύξηση $h = 0,6$ από $x_1 = 1$ σε $x_1 + h = 1,6$, στη συνάρτηση $y = f(x) = x^2 + 3x$ η μεταβολή θα είναι:

$f(1,6) - f(1) = 7,36 - 4 = 3,36$. Συνεπώς η κατά μέσο όρο αλλαγή της f στο διάστημα μεταξύ 1 και 1,6 είναι: $\dfrac{3,36}{0,6} = 5,6$.

Ορισμός: Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι μια συνάρτηση, τότε το όριο:

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad (2)$$

εάν υπάρχει, ονομάζεται *παράγωγος* της f στο σημείο x και συμβολίζεται με f' ή $\dfrac{dy}{dx}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο σημείο x.

Παράδειγμα 1ο : Αν $f(x)=x^2$, τότε να υπολογιστεί η παράγωγός της f'.

Λύση:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

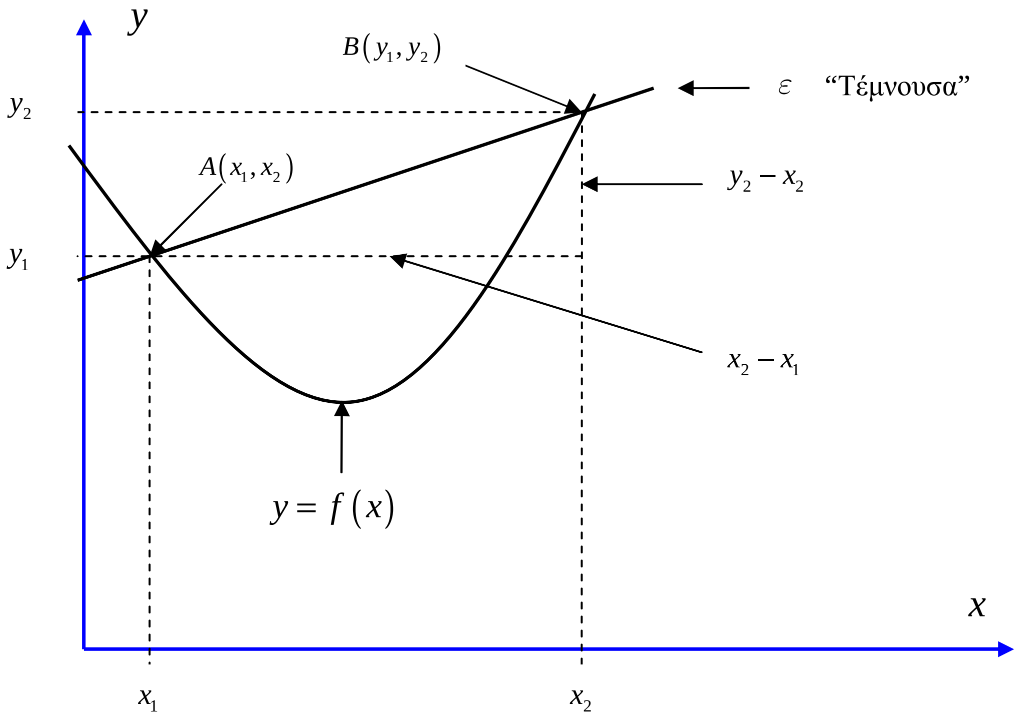
$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Στο σχήμα 1, η ευθεία γραμμή ε ονομάζεται τέμνουσα της καμπύλης $y=f(x)$ στα σημεία $A(x_1,x_2)$ και $B(y_1,y_2)$ και η κλίση της δίνεται από τη σχέση:

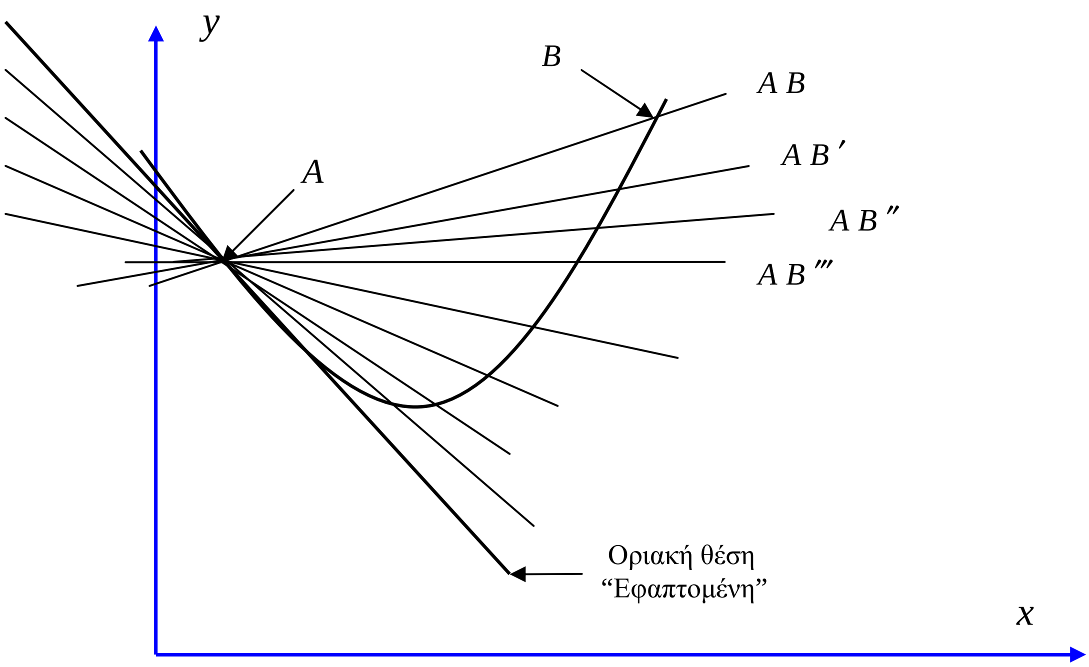
$$m_{AB}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \tag{3}$$

όπου $f(x_1)=y_1$ και $f(x_2)=y_2$.



Σχήμα 1

Τώρα αν το σημείο B αρχίσει να κινείται προς το σημείο A, η θέση της τέμνουσας κάθε φορά είναι AB, AB', AB'', κτλ. Η οριακή θέση όλων των τεμνουσών που διέρχονται από το σημείο A είναι η <u>εφαπτομένη</u> της καμπύλης $y=f\left(x\right)$ στο σημείο αυτό, σχήμα 2.



Σχήμα 2

Γράφουμε τη διαφορά $x_2-x_1=h$ (σχήμα 1), οπότε $x_2=x_1+h$. Εδώ $h\neq 0$, αφού αν ήταν $h=0$ θα είχαμε $x_2=x_1$, δηλαδή δεν θα υπήρχε τέμνουσα γραμμή AB. Έτσι έχουμε:

$$m_{AB}=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}.$$

Καθώς το σημείο B κινείται πάνω στην καμπύλη $y=f\left(x\right)$ (σχήμα 2) προς το σημείο A, τότε $x_2\rightarrow x_1$ και έτσι η διαφορά $x_2-x_1=h$ τείνει προς το μηδέν.

Συνεπώς η οριακή τιμή των κλίσεων των τεμνουσών γραμμών, η οποία είναι η κλίση της εφαπτομένης γραμμής στο σημείο $\left(x_1,\ \ f\left(x_1\right)\right)$ είναι το όριο:

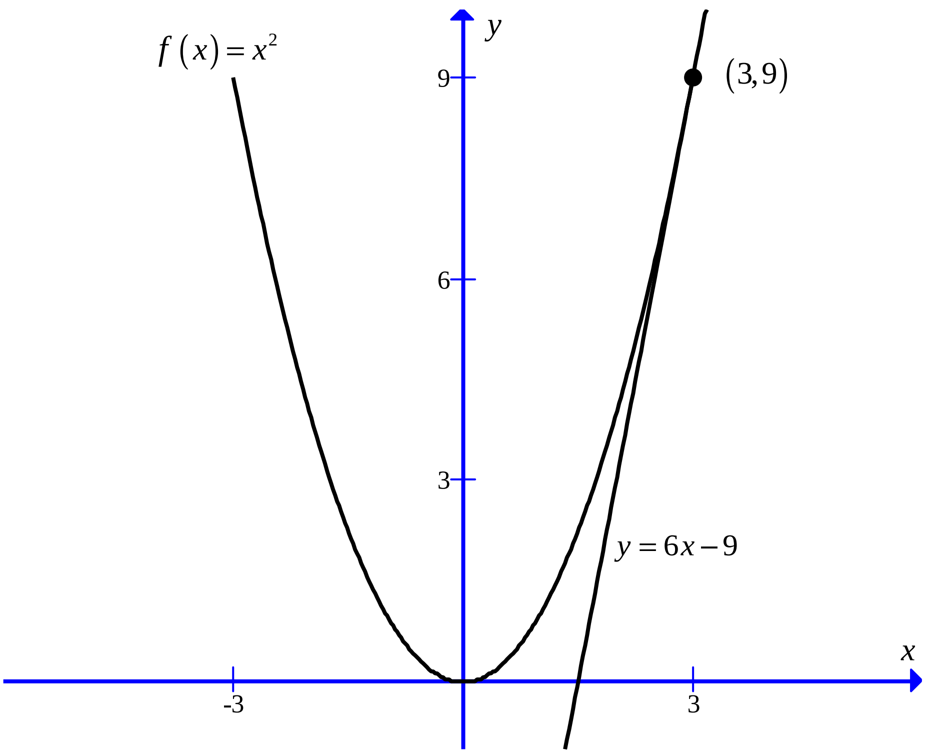
$$\lim_{h\rightarrow 0}=\frac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h},$$

το οποίο, όπως είπαμε πιο πάνω, είναι η παράγωγος f' της συνάρτησης f στο σημείο $\left(x_1,\ \ f\left(x_1\right)\right)$.

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, δηλαδή υπάρχει η παράγωγός της στο σημείο αυτό, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

Παράδειγμα 2^o : Να υπολογιστεί η κλίση της εφαπτομένης, καθώς και η εξίσωση αυτής, για την καμπύλη $f(x) = x^2$ στο σημείο $(3,9)$.

Λύση: Από το πιο πάνω παράδειγμα έχουμε ότι $f'(x) = 2x$, άρα στο σημείο $(3,9)$ παίρνουμε: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Δηλαδή η εφαπτομένη της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο $(3,9)$ έχει κλίση 6, η δε εξίσωση αυτής είναι: $y - 9 = 6(x-3) \Rightarrow y = 6x - 9$, σχήμα 3.



Σχήμα 3

Παράδειγμα 3^o : Αν $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, να υπολογιστεί η $f'(1)$.

Λύση: Πρώτα βρίσκουμε την παράγωγο της f.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(x+h)^2+2(x+h)+3\right]-\left(2x^2+2x+3\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+2x+2h+3-2x^2-2x-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4x+2h+2\right).$$

Άρα $f'(x)=4x+2$ και έτσι $f'(1)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=4\cdot 1+2=6$.

<u>Παράδειγμα 4ο</u> : Να βρεθεί η κλιση της καμπύλης $y=2x+3$ στο σημείο $x=6$.

<u>Λύση</u>: Αν $y=f(x)=2x+3$, έχουμε

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(x+h)+3\right]-(2x+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(x+h)+3\right]-(2x+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+3-2x-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2.$$

Αφού $y'=2$, η κλίση της καμπύλης, όταν $x=6$, ή σε οποιοδήποτε άλλο σημείο είναι ίση με 2. Αυτό είναι προφανές, διότι η δοθείσα "καμπύλη" είναι μια ευθεία γραμμή, που ως γνωστόν έχει την ίδια κλίση σε κάθε σημείο.

<u>Παράδειγμα 5ο</u> : Να υπολογιστεί η $\dfrac{dy}{dx}$, αν $y=\sqrt{x}$.

<u>Λύση</u>: Αν $y=f(x)=\sqrt{x}$, έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Καθώς $h\to 0$, ο αριθμητής και ο παρονομαστής του πιο πάνω κλασματος τείνουν στο μηδέν. Για το λόγο αυτό γράφουμε το κάσμα ως εξής:

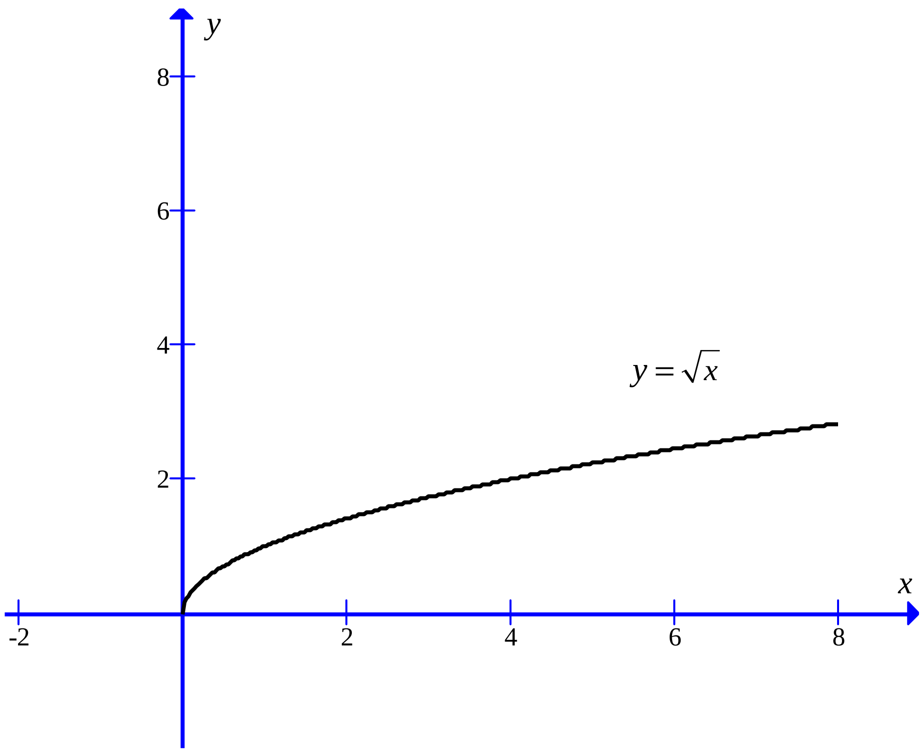
$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Οπότε $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Για να ορίζεται η δοθείσα συνάρτηση, $y=\sqrt{x}$, πρέπει $x\geq 0$, ενώ για να ορίζεται η $\frac{dy}{dx}$ πρέπει $x \succ 0$, δηλαδή στο σημείο $x=0$ δεν υπάρχει κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=\sqrt{x}$.

Αυτό, όπως φαίνεται και στο σχήμα παρακάτω, όταν $x=0$, η εφαπτομένη αυτής της καμπύλης είναι ο κατακόρυφος άξονας των y που δεν έχει κλίση.



Σχήμα 4

Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται αντιληπτό ότι για τον υπολογισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης, μέσω του ορισμού της, ως ορίου, μπορεί να είναι χρονοβόρα και επίπονη διαδικασία. Ευτυχώς, όμως, δεν είναι απαραίτητο να βρίσκουμε την παράγωγο κατ' αυτόν τον τρόπο, διότι υπάρχουν κανόνες παραγώγισης που θα δούμε στη συνέχεια.

3.2 Κανόνες υπολογισμού της παραγώγου

(i) Αν $f(x)=c$, όπου c είναι μια σταθερά, τότε $f'(x)=0$.

(ii) Αν $f(x)=x^n$, τότε $f'(x)=nx^{n-1}$.

(iii) Αν $g(x)=cf(x)$, τότε $g'(x)=cf'(x)$.

Έστω ότι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχουν οι παράγωγες $f'(x)$ και $g'(x)$, τότε:

(iv) Αν $F(x)=f(x)\pm g(x)$, τότε $F'(x)=f'(x)\pm g'(x)$.

(v) Αν $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, τότε $F'(x)=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$.

(vi) Αν $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, τότε $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

(vii) Αν $y=f(u)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του u και u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε η παράγωγος της $y=f(u)$ είναι: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

(viii) Αν $y(u)=u^n$, όπου n είναι ένας πραγματικός αριθμός και u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε η παράγωγος της y είναι: $\dfrac{dy}{dx}=nu^{n-1}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Ο κανόνας (v) ονομάζεται κανόνας του **πολλαπλασιασμού**, ο δε (vi) ονομάζεται κανόνας της **διαίρεσης** και, τέλος, ο (vii) ονομάζεται κανόνας της **αλυσίδας**.

Στη συνέχεια δίνονται οι αποδείξεις μερικών από τους πιο πάνω κανόνες, με την επισήμανση ότι και για τους υπόλοιπους η απόδειξη είναι παρόμοια, με απ' ευθείας εφαρμογή του ορισμού της παραγώγου, δηλαδή του ορίου της σχέσης (2).

Αποδείξεις των κανόνων παραγώγισης:

(i) Έστω $f(x)=c$, όπου c είναι μια σταθερά, τότε από το όριο (2) έχουμε:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}=\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}=\frac{0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0=0.$$

Συνεπώς, αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$.

(iv) Έστω ότι $F(x)=f(x)+g(x)$ και υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$, τότε από το ορισμό της παραγώγου παίρνουμε:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]-\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Συνεπώς, αν $F(x)=f(x)+g(x)$, τότε $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

(v) Έστω ότι $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, τότε από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε $f(x+h)\cdot g(x)$ στον αριθμητή του κλάσματος στο τελευταίο όριο και παίρνουμε:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\{\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}+$$

$$+\frac{\left[f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)\right]}{h}\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{\frac{\left[f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)\right]}{h}+$$

$$+\frac{\left[f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\right]}{h}\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$+\lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$= f(x)\cdot g'(x)+g(x)\,f'(x)$, (αφού $=\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$).

Συνεπώς $F'(x)=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$.

<u>Παράδειγμα 1ο</u> : Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $g(x)=5x^3$, β) $f(x)=\dfrac{0,45}{x^2\sqrt{x}}$, γ) $p(x)=3x^5+\sqrt{x}$, δ) $q(x)=x^4-\sqrt[3]{x^2}$,

ε) $y(x)=\dfrac{3x^2-2}{x}$, στ) $F(x)=\left(x^2+3x\right)\left(4x+5\right)$, ζ) $Q(x)=\dfrac{4x^2-2x+3}{2x-1}$ και

η) $\phi(u)=2u^2-3u-2$, όπου $u(x)=x^2+x$.

<u>Λύση</u>: α) $g(x)=5x^3 \Rightarrow g'(x)=3\cdot 5x^{3-1} \Rightarrow g'(x)=15x^2$.

β) $f(x)=\dfrac{0,45}{x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=0,45x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{5}{2}\cdot 0,45x^{-\frac{5}{2}-1} \Rightarrow$

$f'(x)=-1,125x^{-\frac{7}{2}}$.

γ) $p(x)=3x^5+\sqrt{x} \Rightarrow p'(x)=5\cdot 3x^{5-1}+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow p'(x)=15x^4+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

δ) $q(x)=x^4-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow q(x)=x^4-x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow q'(x)=4x^{4-1}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow$

$q'(x)=4x^3-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

ε) $y(x)=\dfrac{3x^2-2}{x} \Rightarrow y(x)=3x-2x^{-1} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=3\cdot 1-2\left[(-1)x^{-2}\right]=3+\dfrac{2}{x^2}$.

στ) $F(x)=\left(x^2+3x\right)(4x+5) \Rightarrow$

$F'(x)=\left(x^2+3x\right)(4x+5)'+\left(x^2+3x\right)'(4x+5) \Rightarrow$

$F'(x)=\left(x^2+3x\right)(4)+(2x+3)(4x+5) \Rightarrow F'(x)=12x^2+34x+15$.

ζ) $Q(x)=\dfrac{4x^2-2x+3}{2x-1} \Rightarrow$

$Q'(x)=\dfrac{(2x-1)(8x-2)-\left(4x^2-2x+3\right)(2)}{(2x-1)^2}=\dfrac{4\left(2x^2-2x-1\right)}{(2x-1)^2}$.

η) $\phi(u)=2u^2-3u-2$, όπου $u(x)=x^2+x \Rightarrow \phi'(u)=\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{d\varphi}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \Rightarrow$

$\phi'(u)=\dfrac{d}{du}\left(2u^2-3u-2\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^2+x\right) \Rightarrow \phi'(u)=(4u-3)(2x+1) \Rightarrow$

$\phi'(u)=\left[4\left(x^2+x\right)-3\right](2x+1) \Rightarrow \phi'(u)=8x^3+12x^2-2x-3$.

3.3 Παράγωγος λογαριθμικής και εκθετικής συνάρτησης

Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης $y=lnx$, σχήμα 5 είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Επί πλέον, αν $y = lnu$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε:

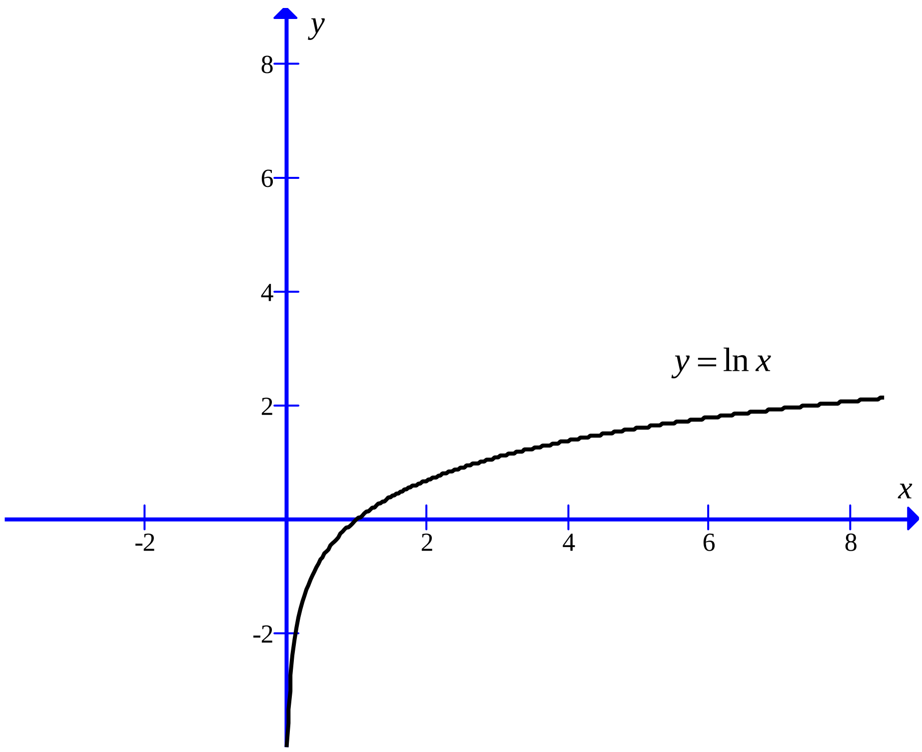
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $y = e^u$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u \cdot \frac{du}{dx}.$$

Επί πλέον αν, $y = a^u$, $a \succ 0$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u\left(lna\right) \cdot \frac{du}{dx}.$$

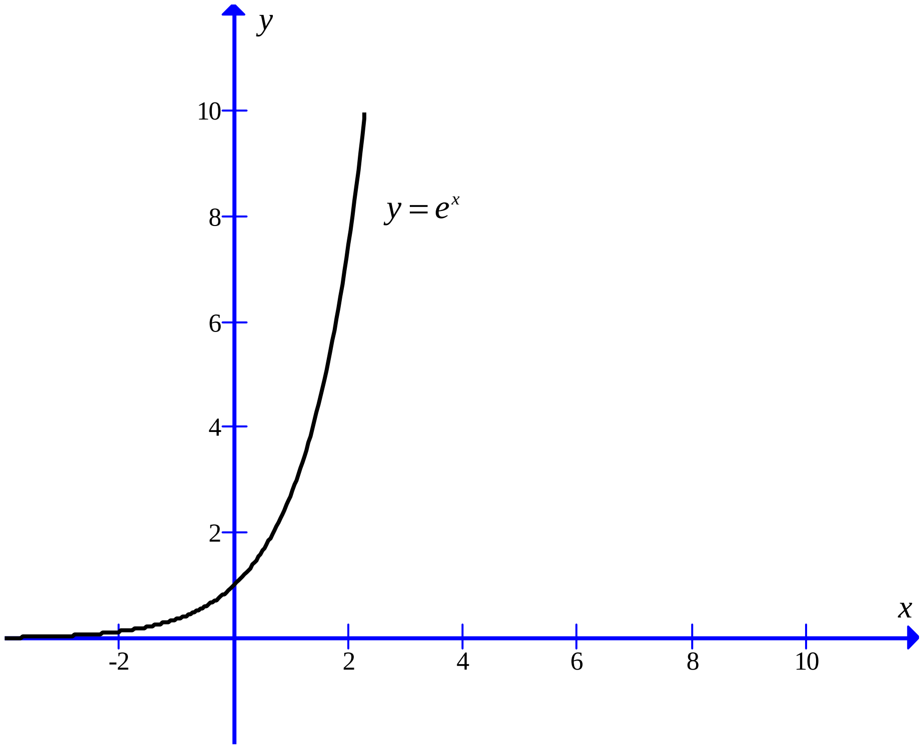


Σχήμα 5

Τέλος, η παράγωγος μιας οποιασδήποτε λογαριθμικής συνάρτησης $y = \log_b u$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x είναι:

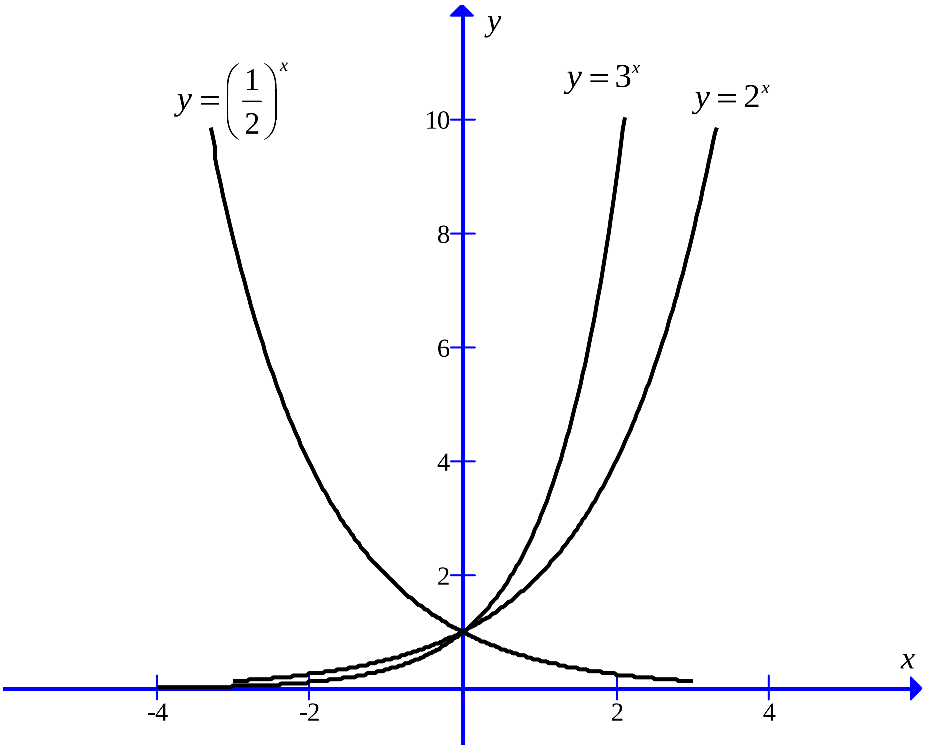
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(log_b u\right) = \frac{1}{u}\left(log_b e\right) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Στο σχήμα 6 έχουμε τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$.



Σχήμα 6

Στο σχήμα 7 βλέπουμε το γράφημα των εκθετικών συναρτήσεων $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$ και $y = 2^x$.



Σχήμα 7

Πολλές φορές η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης $y=f(x)$, η οποία περιέχει γινόμενα, πηλίκα ή δυνάμεις του x, μπορεί να είναι αρκετά δύσκολη και επίπονη διαδικασία. Σε τέτοιες περιπτώσεις, παίρνουμε το λογάριθμο των δυο μελών και αφού πρώτα απλοποιήσουμε κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και στη συνέχεια παίρνουμε την παράγωγο των δυο μελών ως προς x θεωρώντας την $y=f(x)$ ως πεπλεγμένη συνάρτηση.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u> : Να υπολογιστεί η παράγωγος της : $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3}}$.

<u>Λύση</u>: Παίρνουμε το φυσικό λογάριθμο των δυο μελών και έχουμε:

$$lny=ln\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3}} \quad\Rightarrow\quad lny=\frac{1}{4}ln\frac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3} \quad\Rightarrow$$

$$lny=\frac{1}{4}\left[ln(x-1)+2ln\left(x^2+2\right)-ln(x+3)-3ln(x-4)\right].$$

Τώρα παίρνοντας την παράγωγο ως προς x και από τα δυο μέλη, έχουμε:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1}+2\frac{1}{x^2+2}(2x)-\frac{1}{x+3}-3\frac{1}{x-4}\right]$$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{y}{4}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{4x}{x^2+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x-4}\right].$$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u> : Να υπολογιστεί η παράγωγος των: α) $y=x^x$, β) $y=x^{e^{-x^2}}$.

<u>Λύση</u>: α) $y=x^x \Rightarrow lny=lnx^x \Rightarrow lny=xlnx$. Παίρνοντας την παράγωγο και από τα δυο μέλη έχουμε: $\dfrac{1}{y}y'=x\left(\dfrac{1}{x}\right)+(lnx)\cdot 1 \Rightarrow y'=y(1+lnx) \Rightarrow$ $y'=x^x(1+lnx)$.

β) $y=x^{e^{-x^2}} \Rightarrow lny=lnx^{e^{-x^2}} \Rightarrow lny=e^{-x^2}lnx$. Παίρνοντας την παράγωγο και από τα δυο μέλη έχουμε: $\dfrac{1}{y}y'=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)+(lnx)\left[\left(e^{-x^2}\right)(-2x)\right] \Rightarrow$

$$y' = ye^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2xlnx\right) \quad \Rightarrow \quad y' = x^{e^{-x^2}} e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2xlnx\right).$$

3.4 Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

1. Ημίτονο (sin): Αν $y = sinx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (sinx)' = cosx$ (συνημίτονο). Γενικότερα, αν $y = sin(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε
$$\frac{dy}{dx} = cos(u)\frac{du}{dx}.$$

2. Συνημίτονο (cos): Αν $y = cosx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (cosx)' = -sinx$. Ομοίως, όπως και πριν, αν $y = cos(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε
$$\frac{dy}{dx} = -sin(u)\frac{du}{dx}.$$

3. Εφαπτομένη (tan): Αν $y = tanx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (tanx)' = sec^2x$, (όπου sec είναι η τέμνουσα). Αν $y = tan(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε
$$\frac{dy}{dx} = sec^2(u)\frac{du}{dx}.$$

4. Τέμνουσα (sec): Αν $y = secx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (secx)' = (secx)\cdot(tanx)$. Αν $y = sec(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε
$$\frac{dy}{dx} = sec(u)\cdot tan(u)\frac{du}{dx}.$$

5. Συνεφαπτομένη (cot): Αν $y = cotx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (cotx)' = -csc^2x$, ($csc$ είναι η συντέμνουσα). Αν $y = cot(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε
$$\frac{dy}{dx} = -csc^2(u)\frac{du}{dx}.$$

6. Συντέμνουσα (csc): Αν $y = cscx$, τότε $\frac{dy}{dx} = (cscx)' = -(cscx)\cdot(cotx)$.

Αν $y = csc(u)$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της x, τότε

$$\frac{dy}{dx} = -csc(u)\cdot cot(u)\frac{du}{dx}.$$

Οι σχέσεις μεταξύ των πιο πάνω τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι οι εξής:

α) $tanx = \frac{sinx}{cosx}$, β) $cotx = \frac{cosx}{sinx}$,

γ) $secx = \frac{1}{cosx}$, δ) $cscx = \frac{1}{sinx}$.

Οι αντίστροφες συναρτήσεις των *sinx, cosx, tanx, cotx, secx* και *cscx* είναι οι εξής:

(i) $sin^{-1}x$ ή $Arcsinx$, (ii) $cos^{-1}x$ ή $Arccosx$,

(iii) $tan^{-1}x$, ή $Arctanx$, (iv) $cot^{-1}x$, ή $Arccotx$,

(v) $sec^{-1}x$, ή $Arcsecx$, (vi) $csc^{-1}x$, ή $Arccscx$,

αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα</u> : Να υπολογιστεί η παράγωγος των τριγωνομετρικών παραστάσεων:

α) $y = sin3x + cos2x$, β) $y = tanx^2$, γ) $y = cot\left(1-2x^2\right)$, δ) $f(x) = \frac{cosx}{x}$.

<u>Λύση</u>: α) $y = sin3x + cos2x \Rightarrow$

$y' = cos3x\frac{d}{dx}(3x) - sin2x\frac{d}{dx}(2x) = 3cos3x - 2sin2x$.

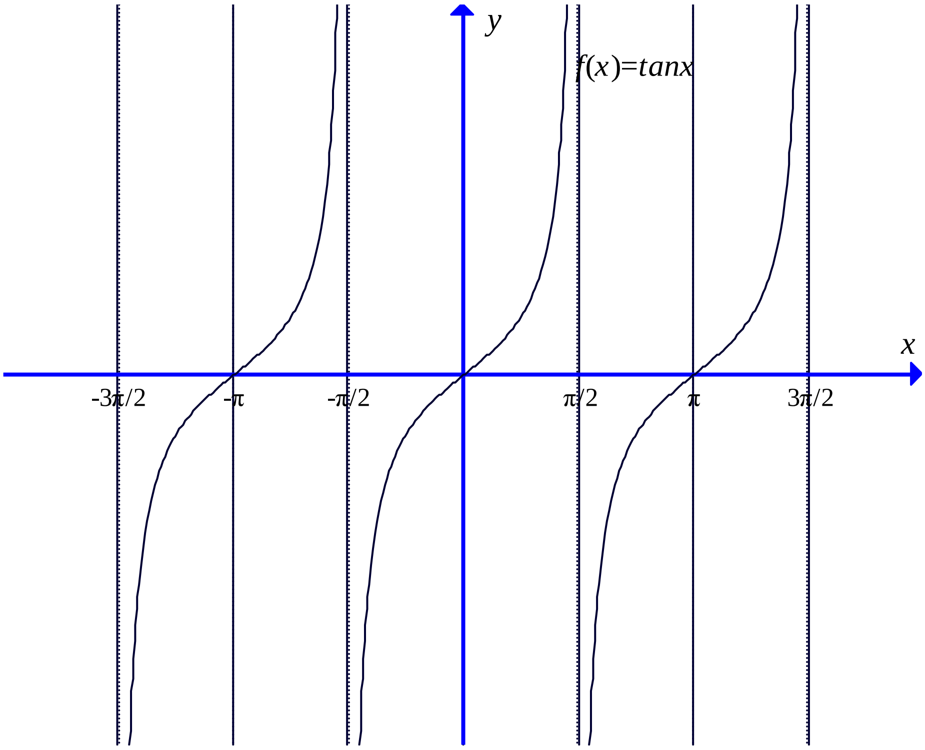
β) $y = tanx^2 \Rightarrow y' = sec^2x^2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x\cdot sec^2x^2$.

γ) $y = cot\left(1-2x^2\right) \Rightarrow y' = -csc^2\left(1-2x^2\right)\frac{d}{dx}\left(1-2x^2\right) = 4x\cdot csc^2\left(1-2x^2\right)$.

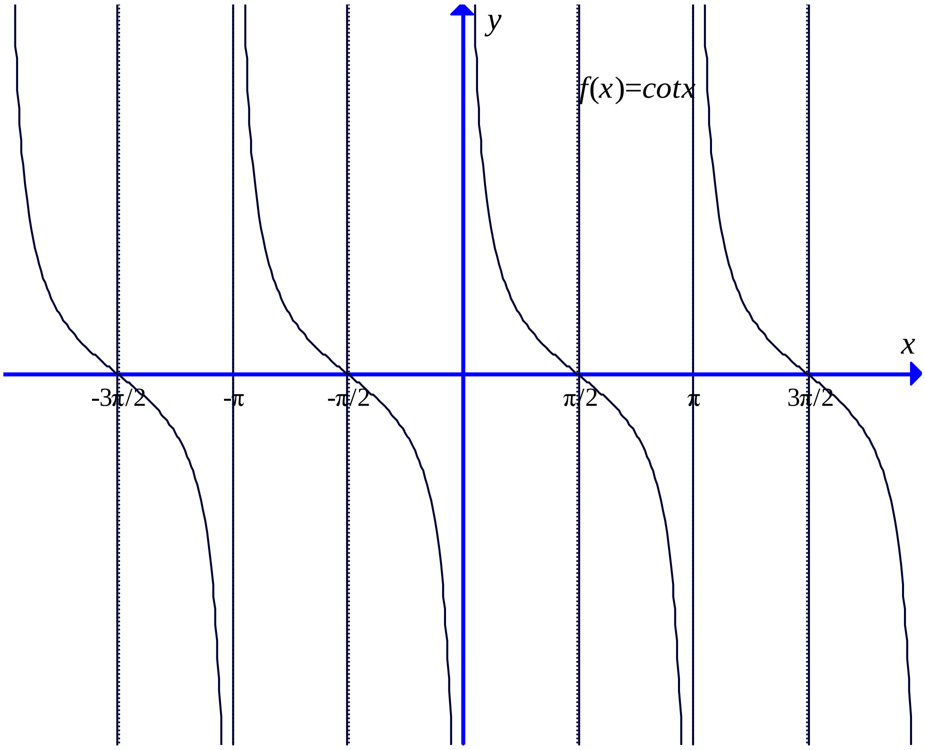
δ) $f(x) = \frac{cosx}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x\frac{d}{dx}(cosx) - cosx\frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-xsinx - cosx}{x^2}$.

Στο 1ο κεφάλαιο είδαμε τις γραφικές παραστάσεις του ημίτονου και συνημίτονου.

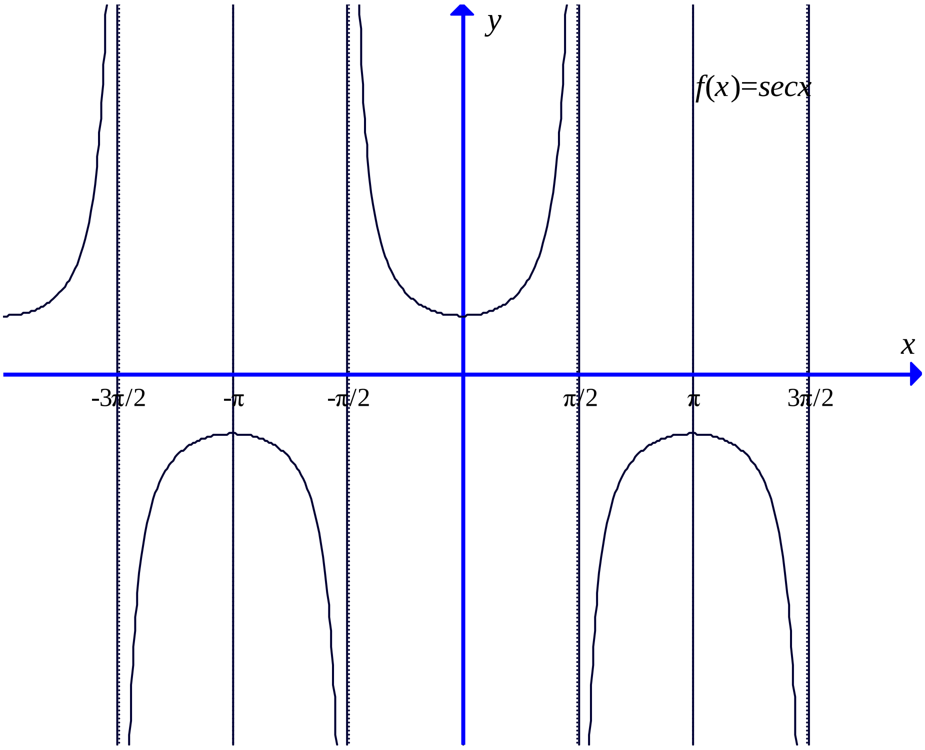
Στα παρακάτω σχήματα (8, 9, 10 και 11) βλέπουμε τα γραφήματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων: *tanx*, *cotx*, *secx* και *cscx* αντίστοιχα.



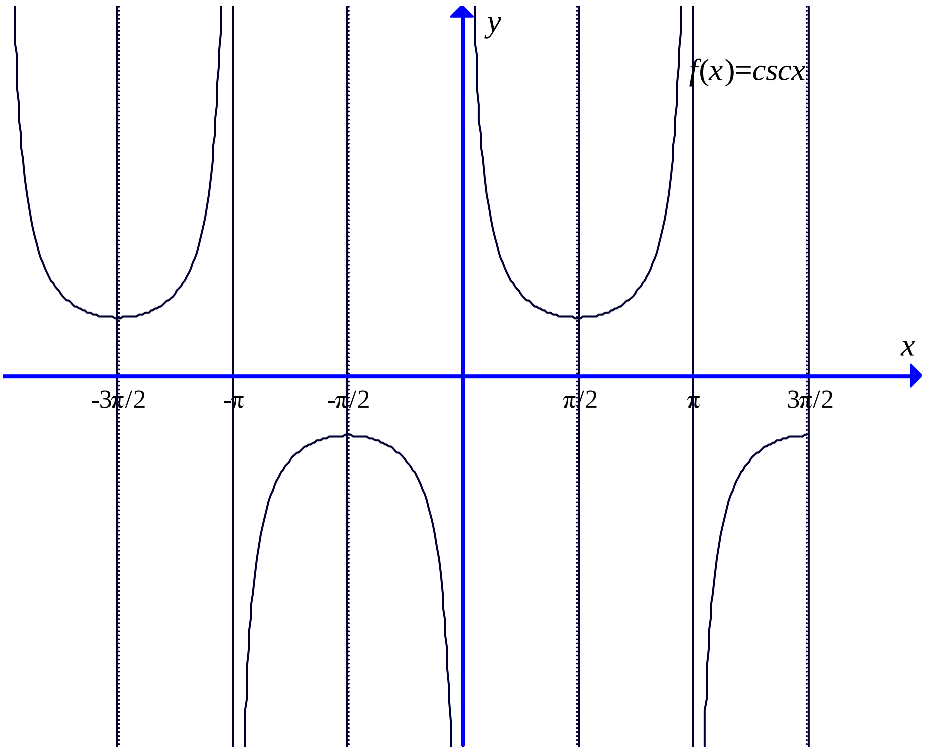
Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10



Σχήμα 11

3.5 Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Όταν γράφουμε τη συνάρτηση $y = sinx$, το ημίτονο εκφράζεται ως συνάρτηση της γωνίας x και έτσι, όταν μεταβάλλεται η γωνία, τότε μεταβάλλεται και το ημίτονο αυτής. Με άλλα λόγια, η γωνία x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το ημίτονο η εξαρτημένη.

Για να αντιστρέψουμε την πιο πάνω σχέση, δηλαδή για να εκφράσουμε τη γωνία ως συνάρτηση του ημιτόνου της, αρκεί να θεωρήσουμε τη γωνία ως εξαρτημένη μεταβλητή και το ημίτονο ως ανεξάρτητη και στη συνέχεια να λύσουμε ως προς y. Η σχέση αυτή γράφεται, όπως προαναφέραμε παραπάνω, ως εξής:

$$y = sin^{-1}x \quad \text{ή} \quad y = Arcsinx$$

που σημαίνει ότι η y είναι η γωνία της οποίας το ημίτονο είναι το x.

Η $y = Arcsinx$ δεν είναι συνάρτηση, αφού για παράδειγμα αν $x = \frac{1}{2}$, υπάρχουν άπειρα y, όπως $y_1 = 30^\circ$, $y_2 = 150^\circ$, $y_3 = 390^\circ$, κ.λ.π., τα οποία έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$, ήτοι ισχύει η $y = Arcsinx$. Για να γίνει αυτή η σχέση συνάρτηση πρέπει να περιορίσουμε το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η εξαρτημένη μεταβλητή. Τέτοια σύνολα είναι τα διαστήματα:

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \text{ όπου } \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots .$$

Για $k = 0$, η y παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ και είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

1) $y = Arcsinx \iff x = siny$, όπου $x \in [-1,\ 1]$ και $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ονομάζεται δε **αντίστροφη κυκλική συνάρτηση** (της τριγωνομετρικής συνάρτησης "ημίτονο" μιας γωνίας).

Το ίδιο ισχύει και για όλα τα $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$, όπου $x \in [-1,\ 1]$ και

$$y \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

Για τις άλλες αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις έχουμε:

2) $y = Arccosx \;\;\Leftrightarrow x = cosy$, όπου $x \in [-1,\;\; 1]$, $y \in [0,\;\; \pi]$.

3) $y = Arctanx \;\;\Leftrightarrow x = tany$, όπου $x \in (-\infty,\;\; +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\;\; \frac{\pi}{2}\right)$.

4) $y = Arccotx \;\;\Leftrightarrow x = coty$, όπου $x \in (-\infty,\;\; +\infty)$, $y \in (0,\;\; \pi)$.

Η παράγωγος των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνεται από τα ακόλουθα:

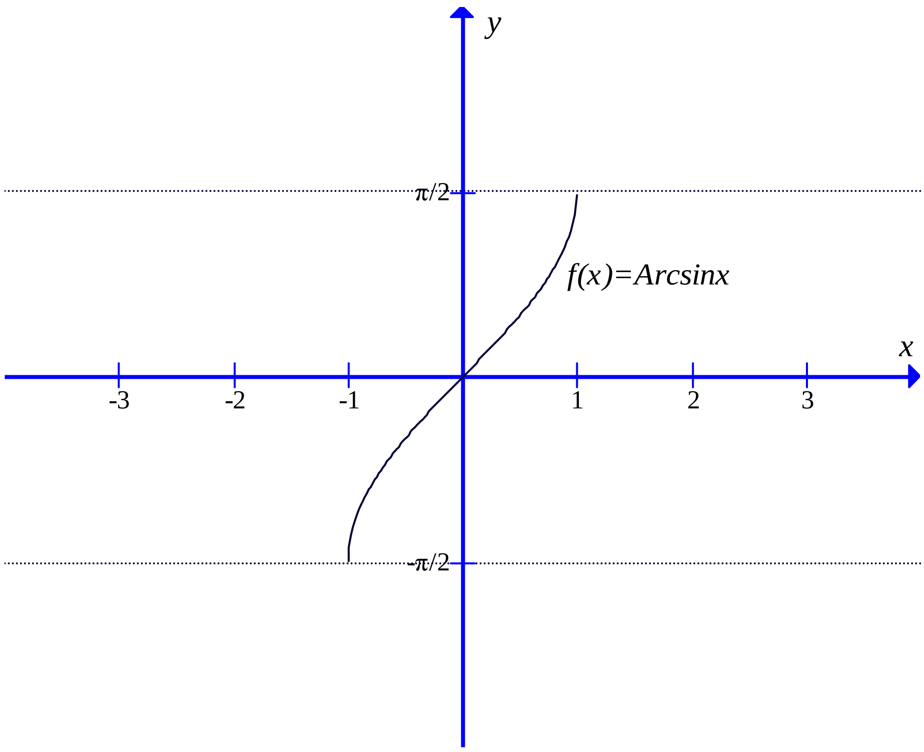
Έστω ότι u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε

α) $\frac{d}{dx}(Arcsinu) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$, β) $\frac{d}{dx}(Arccosu) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$,

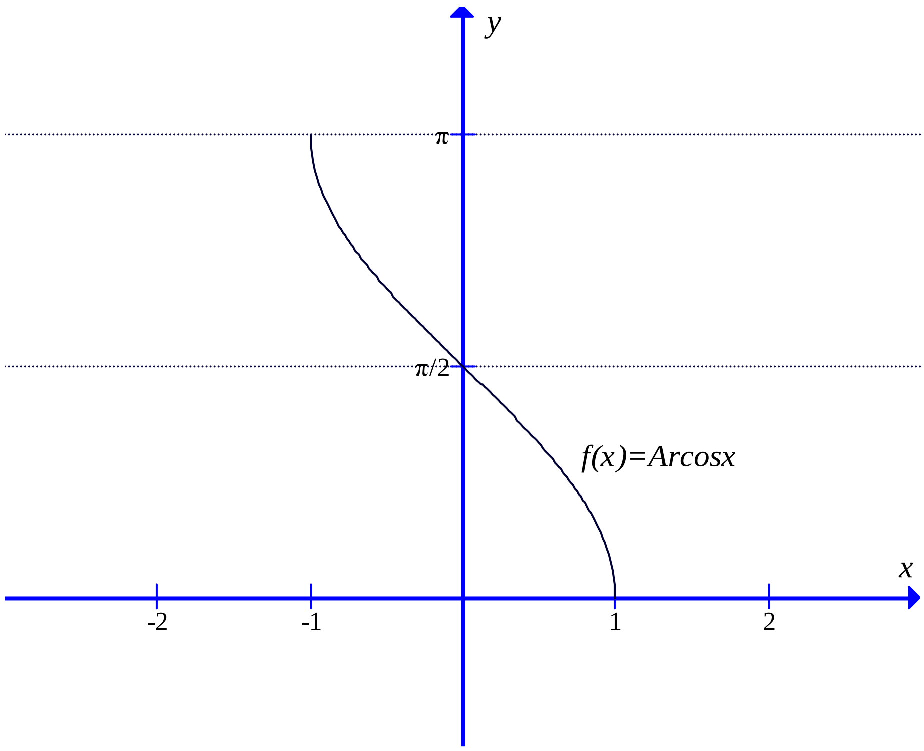
γ) $\frac{d}{dx}(Arctanu) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$, δ) $\frac{d}{dx}(Arccotu) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$,

ε) $\frac{d}{dx}(Arcsecu) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$, στ) $\frac{d}{dx}(Arccscu) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$.

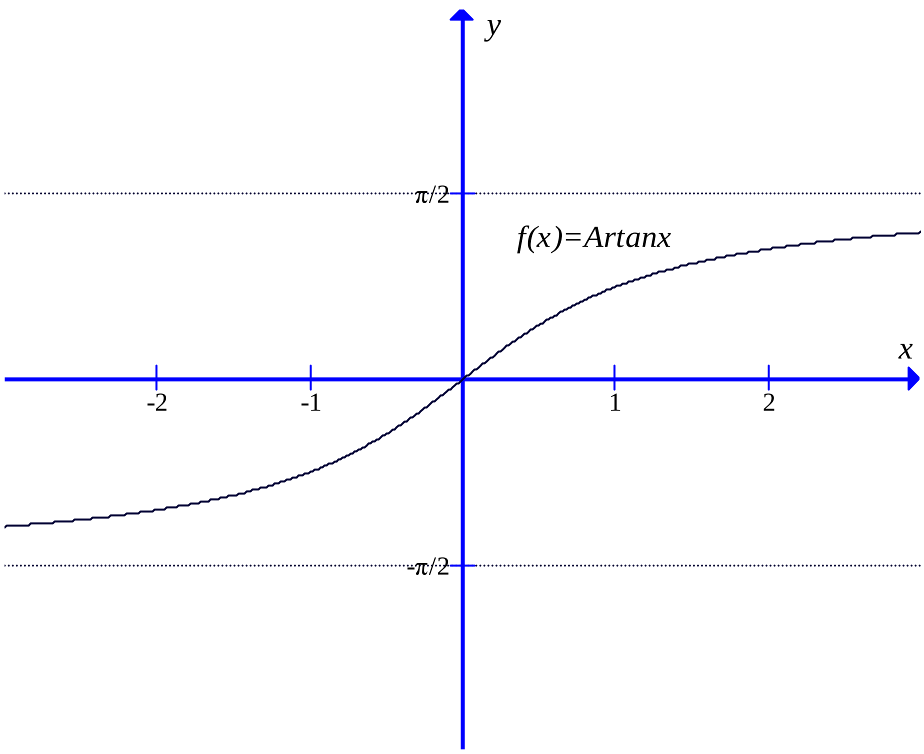
Τα γραφήματα των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων: *Arcsinx*, *Arccosx* και *Arctanx* βλέπουμε στα σχήματα (12, 13 και 14).



Σχήμα 12



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η παράγωγος των αντίστροφων τριγωνομετρικών παραστάσεων:

α) $y = Arcsin(2x-3)$, β) $y = Arccosx^2$,

γ) $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot Arcsin\dfrac{x}{a}$,

δ) $f(x) = Arccot\dfrac{1+x}{1-x}$, ε) $y^2 sinx + y = Arctanx$.

Λύση: α) $y = Arcsin(2x-3) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \cdot \dfrac{d}{dx}(2x-3) \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-\left(4x^2-12x+9\right)}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

β) $y = Arccosx^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

γ) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \cdot Arcsin\dfrac{x}{a} \Rightarrow$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} \cdot \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} = 2\sqrt{a^2-x^2}.$$

δ) $f(x) = Arccot\dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ε) $y^2 sinx + y = Arctanx \Rightarrow 2yy'sinx + y^2 cosx + y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$$y'(2ysinx+1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2 cosx \Rightarrow y' = \frac{1-(1+x^2)y^2 cosx}{(1+x^2)(2ysinx+1)}.$$

3.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των:

α) $ylnx = xe^y$, β) $e^{xy} = x+y$, γ) $y = e^{lnx}$, δ) $f(x) = \left(x^3-1\right)^7$,

ε) $y = \left(x^2-4\right)^5(3x+5)^4$, στ) $q(x) = \frac{1}{\left(x^2-2\right)^4}$,

ζ) $p(u) = u^{10}$, όπου $u = 8-t^2+t^5$.

2. Παραγωγίστε τα ακόλουθα: α) $y = tan^2 x$, β) $f(x) = sec^2\sqrt{x}$,

γ) $\zeta(\theta) = \sqrt{csc2\theta}$, δ) $\psi(x) = x^2 sinx$, ε) $g(x) = tan^2(3x-2)$,

στ) $siny + cosx = 1$, ζ) $y = Arccot\frac{1+x}{1-x}$, η) $y = xArccsc\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$.

3. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων: α) $y = Arcsinx^2$,

β) $y = Arctan\frac{1}{x^2}$, γ) $y = x^2 Arcsin(1-x)$, δ) $y = x^2 Arccot\frac{1}{\sqrt{x}}$,

ε) $y = Arccos\sqrt{x}$, στ) $xsiny + x^3 = Arctany$.

4. Παραγωγίστε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $y + y^3 = x$, β) $x^3 + 4xy^2 - y^4 - 25 = 0$, γ) $x^3 = \left(y - x^2\right)^2$,

δ) $xe^y + y = 4$, ε) $ylnx = xe^y$, στ) $ln(xy) + x = 10$,

ζ) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{3x-4}}$, η) $y = (lnx)^{e^x}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o}

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

4.1 Παράγωγος ανωτέρας τάξης

Αφού η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μια άλλη συνάρτηση, κατά συνέπεια, έχει και αυτή παράγωγο, την οποία μπορούμε να βρούμε με τους γνωστούς τρόπους που αναπτύξαμε παραπάνω. Η νέα παράγωγος, ως συνάρτηση έχει και αυτή παράγωγο. Συνεχίζοντας έτσι, έχουμε κατά σειρά, 1^{η} παράγωγο, 2^{η} παράγωγο 3^{η} κ.ο.κ., δηλαδή παραγώγους **ανωτέρας τάξης** για μια δοθείσα συνάρτηση.

Αν $y = f(x)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε οι παράγωγοι μέχρι τετάρτης τάξης της, ως προς x, γράφονται:

Πρώτη παράγωγος	y'	ή $f'(x)$	ή $\dfrac{dy}{dx}$	ή $\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]$
Δεύτερη παράγωγος	y''	ή $f''(x)$	ή $\dfrac{d^2y}{dx^2}$	ή $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\right]$
Τρίτη παράγωγος	y'''	ή $f'''(x)$	ή $\dfrac{d^3y}{dx^3}$	ή $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[f(x)\right]$
Τέταρτη παράγωγος	$y^{(4)}$	ή $f^{(4)}(x)$	ή $\dfrac{d^4y}{dx^4}$	ή $\dfrac{d^4}{dx^4}\left[f(x)\right]$

Παραδείγματα: α) Αν $y = 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 5x - 7$, να βρεθεί η y'''.

β) Για τη συνάρτηση $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$ να υπολογιστεί η $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, για $x = 4$.

γ) Αν $g(x) = xlnx$, να βρεθεί η $g'''(2)$.

δ) Να υπολογιστεί η y'' για την $x^2 + 4y^2 = 4$.

ε) Να υπολογιστεί η $\dfrac{d^2t}{dr^2}$ αν $t^2 = e^{r+t}$.

Λύση: α) $y = 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 5x - 7 \Rightarrow y' = 8x^3 + 18x^2 - 24x + 5$.

Παραγωγίζοντας την y' παίρνουμε:

$$y'' = 24x^2 + 36x - 24.$$

Παραγωγίζοντας την y'' παίρνουμε: $y''' = 48x + 36$.

β) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x+4} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+4)(2x) - (x^2)(1)}{(x+4)^2} \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 8x}{(x+4)^2}$. Παραγωγίζοντας ξανά παίρνουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+4)^2(2x+8) - (x^2+8x)(2)(x+4)}{(x+4)^4}$$

$$= \frac{(x+4)\left[(x+4)(2x+8)\right] - (x^2+8x)(2)}{(x+4)^4}$$

$$= \frac{2x^2 + 8x + 8x + 32 - 2x^2 - 16x}{(x+4)^3} = \frac{32}{(x+4)^3}.$$

Για $x = 4$, έχουμε $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \dfrac{32}{(4+4)^3} = \dfrac{32}{16^3} = \dfrac{1}{16}$.

γ) $g(x) = xlnx \Rightarrow g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x}\right) + (lnx)(1) = 1 + lnx$.

$$g''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

$$g'''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad g'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

δ) Παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης: $x^2 + 4y^2 = 4$ και έχουμε:

$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{4y}$. $y'' = -\dfrac{4y(1) - x(4y)'}{(4y)^2} \Rightarrow$

$$y'' = -\frac{4y - 4xy'}{16y^2} = \frac{xy' - y}{4y^2}.$$

Αφού $y' = -\dfrac{x}{4y}$, αντικαθιστώντας την στην πιο πάνω σχέση παίρνουμε:

$$y''=\frac{x\left(-\frac{x}{4y}\right)-y}{4y^2}=\frac{-\frac{x^2-4y^2}{4y}}{4y^2}=-\frac{x^2+4y^2}{4y^3}.$$

ε) $t^2=e^{r+t}$ παραγωγίζοντας ως προς r παίρνουμε:

$$2t\cdot\frac{dt}{dr}=e^{r+t}\left(1+\frac{dt}{dr}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dr}=\frac{e^{r+t}}{2t-e^{r+t}}$$ και αφού $t^2=e^{r+t}$ έχουμε:

$$\frac{dt}{dr}=\frac{t^2}{2t-t^2}=\frac{t}{2-t}.$$

$$\frac{d^2t}{dr^2}=\frac{(2-t)\frac{dt}{dr}-t\left(-\frac{dt}{dr}\right)}{(2-t)^2}$$

$$=\frac{2\frac{dt}{dr}-t\frac{dt}{dr}+t\frac{dt}{dr}}{(2-t)^2}=\frac{2\frac{dt}{dr}}{(2-t)^2}.$$

Αφού $\frac{dt}{dr}=\frac{t}{2-t}$ έχουμε: $\frac{d^2t}{dr^2}=\frac{2\left(\frac{t}{2-t}\right)}{(2-t)^2}\Rightarrow\frac{d^2t}{dr^2}=\frac{2t}{(2-t)^3}.$

4.2 Μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων

Κανόνας 1: Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y=f(x)$ η πρώτη παράγωγος $f'(x)\succ 0$ σε ένα διάστημα I, τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό, ενώ αν $f'(x)\prec 0$ στο I, τότε η f είναι φθίνουσα εκεί.

Ορισμός 1: Μια συνάρτηση $y=f(x)$ έχει **τοπικό μέγιστο** σε ένα σημείο $x=x_0$, αν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, στο οποίο ισχύει: $f(x_0)\geq f(x)$.

Ορισμός 2: Μια συνάρτηση $y=f(x)$ έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x_0=x$, αν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, στο οποίο ισχύει:

$f(x_0) \le f(x)$.

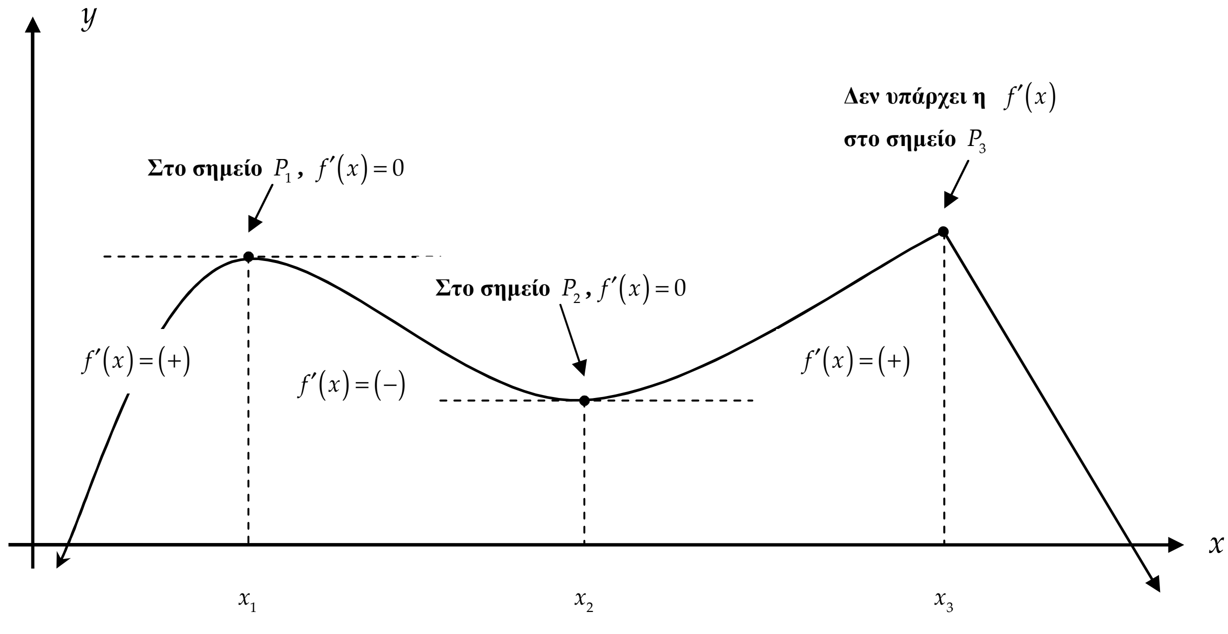
<u>Ορισμός 3</u>: Μια συνάρτηση $y = f(x)$ έχει **ολικό μέγιστο** στο σημείο $x_0 = x$, αν $f(x_0) \ge f(x), \forall x \in D(f)$.

<u>Ορισμός 4</u>: Μια συνάρτηση $y = f(x)$ έχει **ολικό ελάχιστο** στο σημείο $x_0 = x$, αν $f(x_0) \le f(x), \forall x \in D(f)$.

Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης ονομάζονται **τοπικά ακρότατα.** Τα δε ολικά μέγιστα και ελάχιστα ονομάζονται **ολικά ακρότατα** της συνάρτησης.

<u>Κανόνας 2</u>: Αν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο $x = x_0$, τότε $f'(x_0) = 0$ ή η $f'(x_0)$ δεν ορίζεται (δεν υπάρχει).

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γράφημα μιας συνάρτησης f, για την οποία έχουμε: α) Το σημείο P_1 είναι τοπικό και ολικό μέγιστο, αφού ισχύει, τόσο ο ορισμός 1, όσο και ο 3. β) Το σημείο P_2 είναι τοπικό ελάχιστο, αφού ισχύει ο ορισμός 2, όχι όμως ο 4. γ) Το σημείο P_3 είναι τοπικό μέγιστο, αφού ισχύει ο ορισμός 1. Στο σημείο αυτό δεν υπάρχει η παράγωγος f' της f.



Σχήμα 1

Τα τοπικά ακρότατα σημεία της συνάρτησης βρίσκονται εκεί όπου το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει, ανεξάρτητα αν αυτή υπάρχει στο συγκεκριμένο σημείο ή όχι. Για τοπικό μέγιστο, όπως είναι το σημείο $x = x_1$ (σχήμα 1), το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από $(+)$ για $x \prec x_1$ σε $(-)$ για $x \succ x_1$. Στο τοπικό ελάχιστο, όπως είναι το σημείο $x = x_2$ (σχήμα 1), το πρόσημο της $f'(x)$ αλλάζει από $(-)$ σε $(+)$. Τέλος, στο τοπικό μέγιστο σημείο $x = x_3$, η $f'(x)$ αλλάζει από $(+)$ σε $(-)$. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο κανόνα.

<u>Κανόνας 3</u>: Αν $x_0 \in D(f)$ και η $f'(x)$ αλλάζει από $(+)$ σε $(-)$, καθώς η x αυξάνει, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = x_0$. Αν η $f'(x)$ αλλάζει από $(-)$ σε $(+)$, καθώς η x αυξάνει, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$.

<u>Ορισμός 5</u>: Αν $f'(x_0) = 0$ ή η $f'(x_0)$ δεν ορίζεται, τότε η x_0 ονομάζεται **κρίσιμη τιμή** της f και το σημείο του γραφήματός της $(x_0,\ f(x_0))$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο**.

<u>Σημείωση</u>: Ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f είναι μεν πιθανό ακρότατο, αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη μέγιστο ή ελάχιστο σημείο αυτής.

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τα παραπάνω και να πούμε πως μας βοηθάει η **πρώτη παράγωγος** $f'(x)$ στον εντοπισμό τον τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f.

- Βρίσκουμε πρώτα την $f'(x)$.
- Προσδιορίζουμε τις κρίσιμες τιμές
- Στα διαστήματα που μας δίνουν οι κρίσιμες τιμές, εξετάζουμε το πρόσημο της $f'(x)$, δηλαδή αν είναι $f'(x) \succ 0$ ή $f'(x) \prec 0$.
- Για κάθε κρίσιμη τιμή $x_0 \in D(f)$, εξετάζουμε αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο καθώς η x αυξάνει. Έχουμε τοπικό μέγιστο για $x = x_0$ αν η $f'(x)$ αλλάζει από $(+)$ σε $(-)$ και τοπικό ελάχιστο αν αυτή αλλάζει από $(-)$ σε $(+)$. Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο, τότε δεν έχουμε τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο για $x = x_0$.

<u>Παράδειγμα 1^{o}</u>: α) Για τη συνάρτηση $y = f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ να βρεθούν τα διαστήματα, στα οποία αυτή είναι αύξουσα ή φθίνουσα, καθώς και τα τοπικά της ακρότατα.

β) Να εξεταστεί η $y = f(x) = x^{2/3}$ για τοπικά ακρότατα.

<u>Λύση</u>: α) $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = 1$ (κρίσιμες τιμές). Ακόμη, αφού η $f'(-1)$ δεν υπάρχει, η $x = -1$ είναι επίσης κρίσιμη τιμή. Κατά συνέπεια έχουμε τα εξής διαστήματα προς εξέταση: $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ και $(1,\ \infty)$.

Για $x \prec -3$, $f'(x) = \frac{(-)(-)}{(+)} = (+)$ και έτσι, η f είναι αύξουσα.

Για $-3 \prec x \prec -1$, $f'(x) = \frac{(+)(-)}{(+)} = (-)$ και έτσι, η f είναι φθίνουσα.

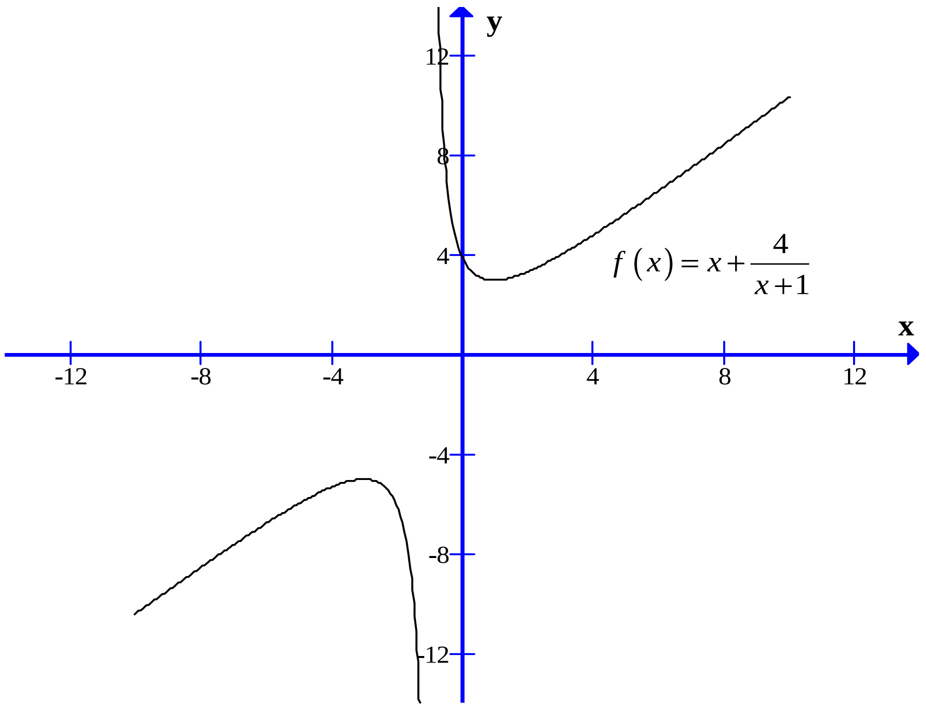
Για $-1 \prec x \prec -1$, $f'(x) = \frac{(+)(-)}{(+)} = (-)$ και έτσι, η f είναι φθίνουσα.

Για $x \succ 1$, $f'(x) = \frac{(+)(+)}{(+)} = (+)$ και έτσι, η f είναι αύξουσα.

Συνεπώς η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ -3)$ και $(1,\ \infty)$, ενώ φθίνουσα είναι στα $(-3,\ -1)$ και $(-1,\ 1)$.

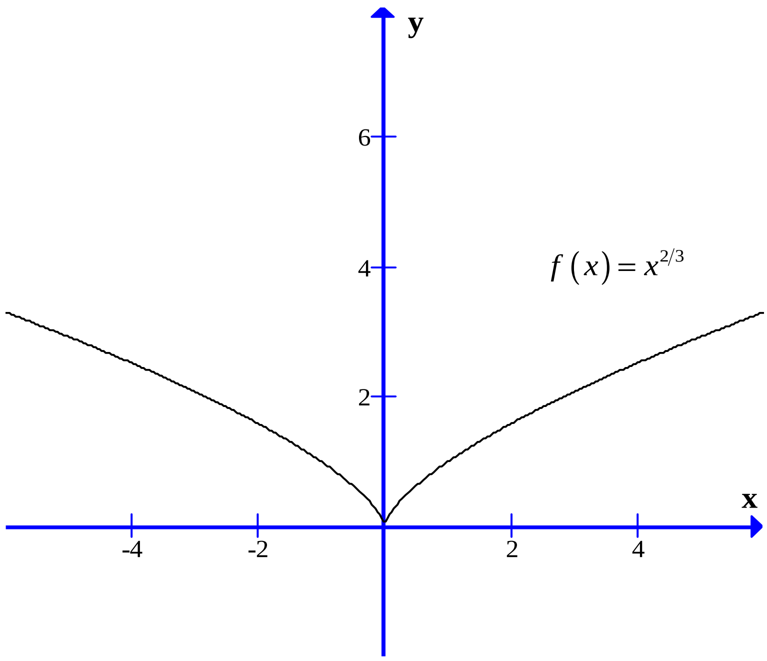
Τώρα, στο $x = -3$, η $f'(x)$ αλλάζει από $(+)$ σε $(-)$, άρα έχουμε τοπικό μέγιστο εκεί. Στο $x = 1$, η $f'(x)$ αλλάζει από $(-)$ σε $(+)$, άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο εκεί. Το $x = -1 \notin D(f)$ οπότε δεν το εξετάζουμε.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γράφημα της $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$.



Σχήμα 2

β) $y=f(x)=x^{2/3}$, παραγωγίζοντας παίρνουμε: $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$. Όταν $x=0$ δεν ορίζεται η $f'(x)$, οπότε έχουμε κρίσιμη τιμή εκεί. Αν $x \prec 0$, τότε η $f'(x)\prec 0$, ενώ αν $x \succ 0$, τότε η $f'(x)\succ 0$. Αφού $x=0\in D(f)$, το σημείο αυτό, $x=0$, είναι τοπικό ελάχιστο, καθώς επίσης και ολικό ελάχιστο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 3.



Σχήμα 3

Παράδειγμα 2ο: Να βρεθούν τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ στο κλειστό διάστημα $[1,\ 4]$. Να γίνει το γράφημα της f.

Λύση: Έχουμε ότι $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$. Θέτοντας $f'(x) = 0$ παίρνουμε την κρίσιμη τιμή $x = 2$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της δοθείσας συνάρτησης.

Τώρα εξετάζουμε τα διαστήματα $(-\infty,\ 2)$ και $(2,\ \infty)$.

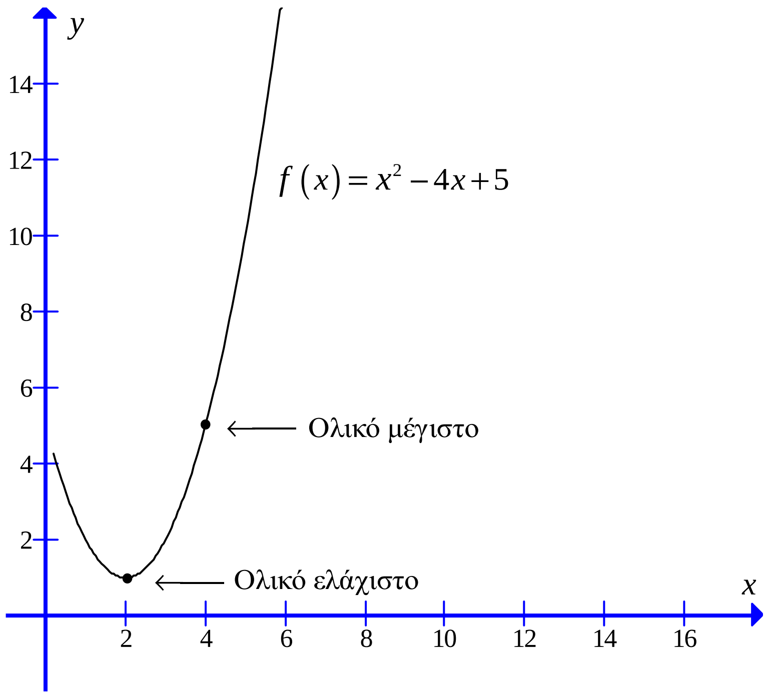
Όταν $x \in (-\infty,\ 2)$, τότε $f'(x) \prec 0$ και η f είναι φθίνουσα.

Όταν $x \in (2,\ \infty)$, τότε $f'(x) \succ 0$ και η f είναι αύξουσα.

Συνεπώς υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 2,\ \ y = 1$.

Εξετάζουμε, στη συνέχεια την f στα άκρα του διαστήματος $[1,\ 4]$ και έχουμε: $f(1) = 2$, $f(4) = 5$. Άρα, αφού $f(4) \succ f(1)$ έχουμε ολικό (και τοπικό) μέγιστο στο σημείο $x = 4,\ \ y = 5$. Επίσης, αφού $f(1) \succ f(2)$, το σημείο $x = 2,\ \ y = 1$ είναι, εκτός από τοπικό και ολικό ελάχιστο.

Βλέπουμε παρακάτω τη γραφική παράσταση της f, όπου φαίνονται τα ακρότατα σημείο της, ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

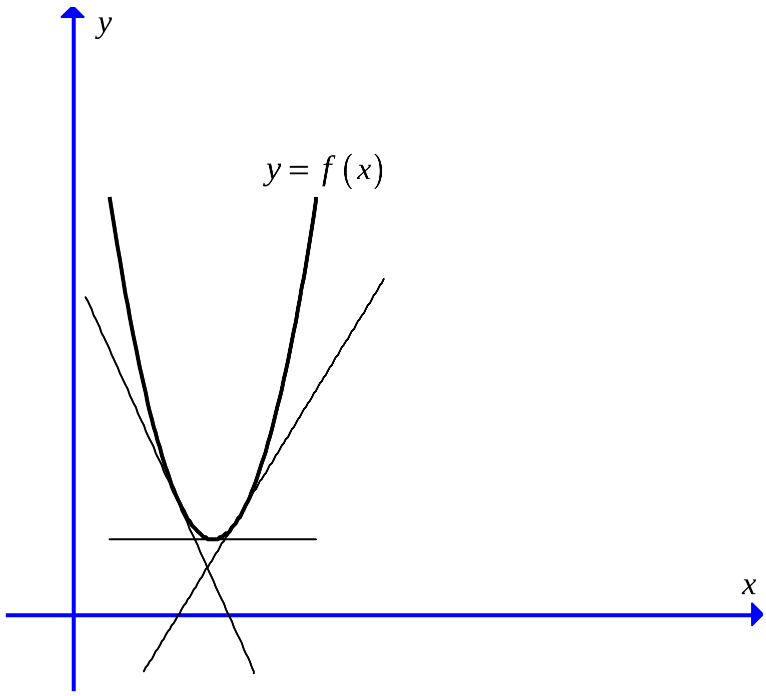


Σχήμα 4

4.3 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις – σημεία καμπής

Ορισμός 6: Μια συνάρτηση, f, λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω σε ένα διάστημα I, όταν η παράγωγός της, f' είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα αυτό. Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια είναι, η f να ορίζεται και να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Οι συναρτήσεις που στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω ονομάζονται **κυρτές** συναρτήσεις. Στο σχήμα 5 πιο κάτω βλέπουμε μια τέτοια συνάρτηση.

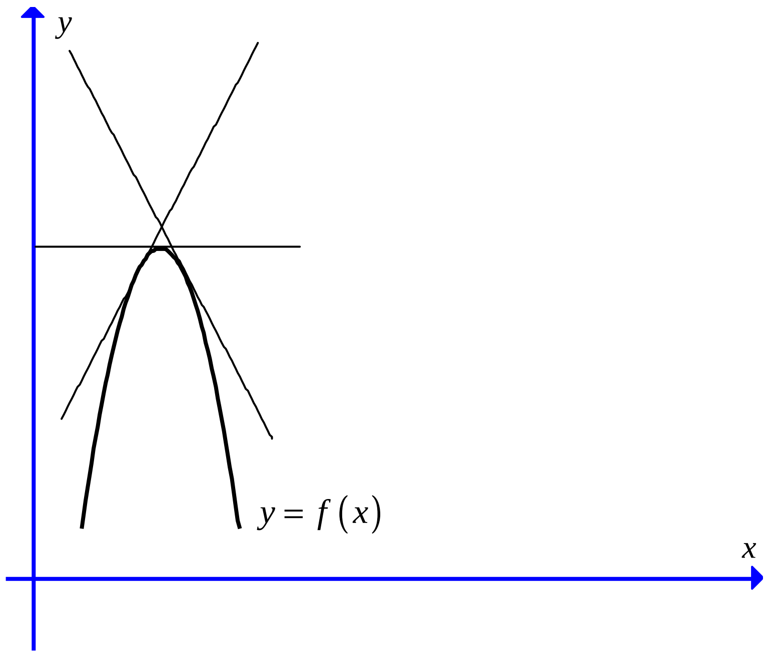


Σχήμα 5

Σημείωση: Το γράφημα μιας κυρτής συνάρτησης, σε ένα διάστημα I, βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από την εφαπτομένη του σε οποιαδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.

Ορισμός 7: Μια συνάρτηση, f, λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω σε ένα διάστημα I, όταν η παράγωγός της f' είναι μια φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα αυτό. Απαραίτητη προϋπόθεση επίσης είναι, η f να ορίζεται και να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Οι συναρτήσεις που στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω ονομάζονται **κοίλες** συναρτήσεις. Στο σχήμα 6 πιο κάτω βλέπουμε μια τέτοια συνάρτηση.



Σχήμα 6

<u>Σημείωση</u>: Το γράφημα μιας κοίλης συνάρτησης, σε ένα διάστημα I, βρίσκεται εξ ολοκλήρου κάτω από την εφαπτομένη του σε οποιαδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.

<u>Κανόνας 4</u>: Αν $f''(x) \succ 0$ σε ένα διάστημα I, τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό, ενώ αν $f''(x) \prec 0$, τότε η f είναι κοίλη στο I.

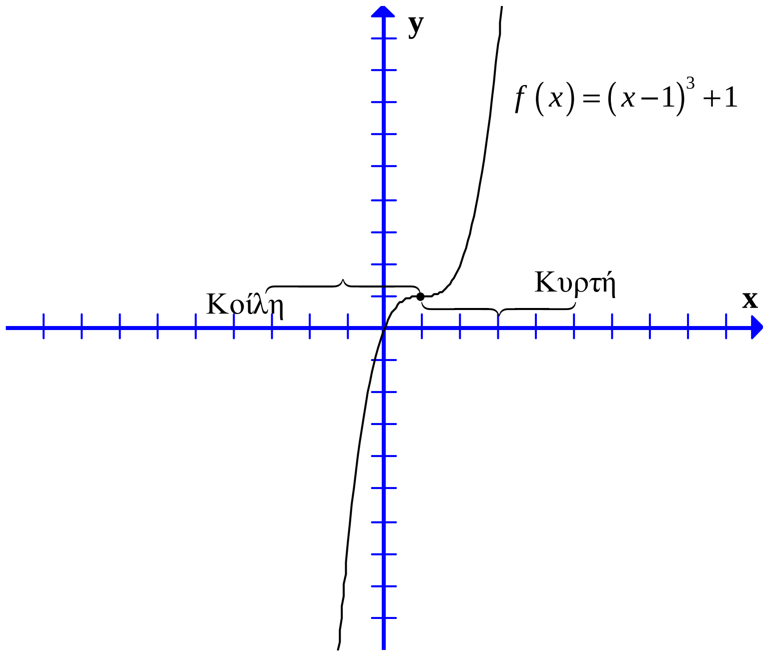
Μια συνάρτηση f λέμε ακόμη ότι είναι κυρτή σε ένα <u>σημείο</u> x_0 αν υπάρχει ένα διάστημα γύρω από το σημείο αυτό, στο οποίο η f είναι κυρτή. Στην περίπτωση αυτή $f''(x_0) \succ 0$. Ομοίως η f είναι κοίλη σε ένα σημείο x_0 αν $f''(x_0) \prec 0$.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>: Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 + 1$ είναι κυρτή ή κοίλη.

<u>Λύση</u>: Βρίσκουμε πρώτα τη δεύτερη παράγωγο της δοθείσας συνάρτησης $f''(x)$.

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1).$$

Οπότε η f είναι κυρτή όταν $6(x-1) \succ 0$, δηλαδή όταν $x \succ 1$. Επίσης η f είναι κοίλη όταν $6(x-1) \prec 0$, δηλαδή όταν $x \prec 1$. (Βλέπε σχήμα 7). Στο σημείο $x=1$ η f αλλάζει από κοίλη σε κυρτή συνάρτηση.



Σχήμα 7

Τα σημεία όπου μια συνάρτηση αλλάζει, από κυρτή γίνεται κοίλη ή αντιστρόφως, ονομάζονται **σημεία καμπής.**

<u>Παράδειγμα 2</u>

Παράδειγμα 2ο: Να εξεταστεί που η συνάρτηση $f(x)=6x^4-8x^3+1$ είναι κυρτή και που κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της.

Λύση: $f'(x)=24x^3-8x^2 \Rightarrow f''(x)=72x^2-48x=72x\left(x-\frac{2}{3}\right)$. Τώρα για $f''(x)=0$ έχουμε: $x=0$ ή $x=\frac{2}{3}$ που είναι τα πιθανά σημεία καμπής της f.

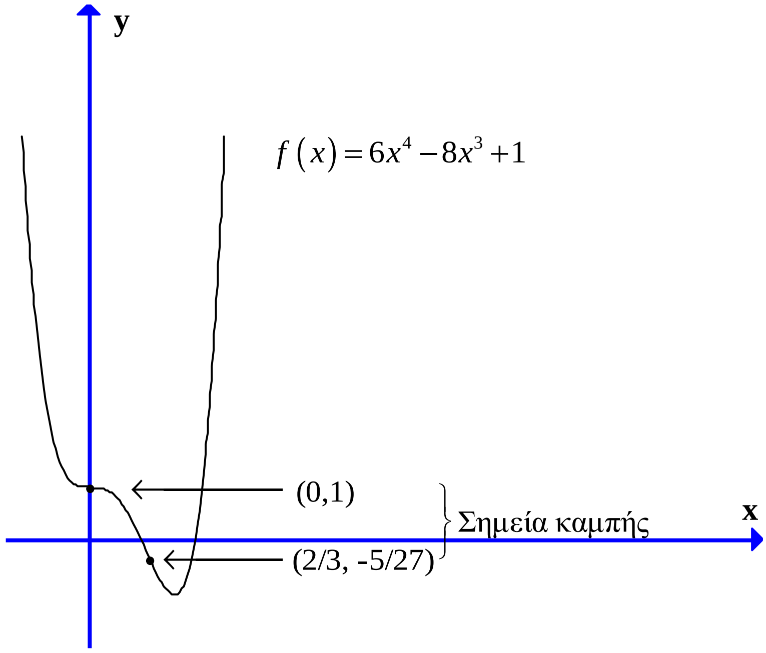
Τα διαστήματα που πρέπει να εξετάσουμε είναι:

1. $(-\infty,\ 0)$, όπου $f''(x)=(-)(-)=(+)$ και έτσι η f είναι κυρτή.

2. $(0,\ 2/3)$, όπου $f''(x)=(+)(-)=(-)$ και έτσι η f είναι κοίλη.

3. $(2/3,\ \infty)$, όπου $f''(x)=(+)(+)=(+)$ και έτσι η f είναι κυρτή.

Στο σχήμα 8 βλέπουμε το γράφημα της $f(x)=6x^4-8x^3+1$ και τα σημεία καμπής της, δηλαδή τα $(0,\ 1)$ και $(2/3,\ -5/27)$.



Σχήμα 8

Με τη δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης μπορούμε να εξετάσουμε τις κρίσιμες τιμές της αν είναι τοπικά ακρότατα σημεία αυτής. Αυτό γίνεται ως ακολούθως:

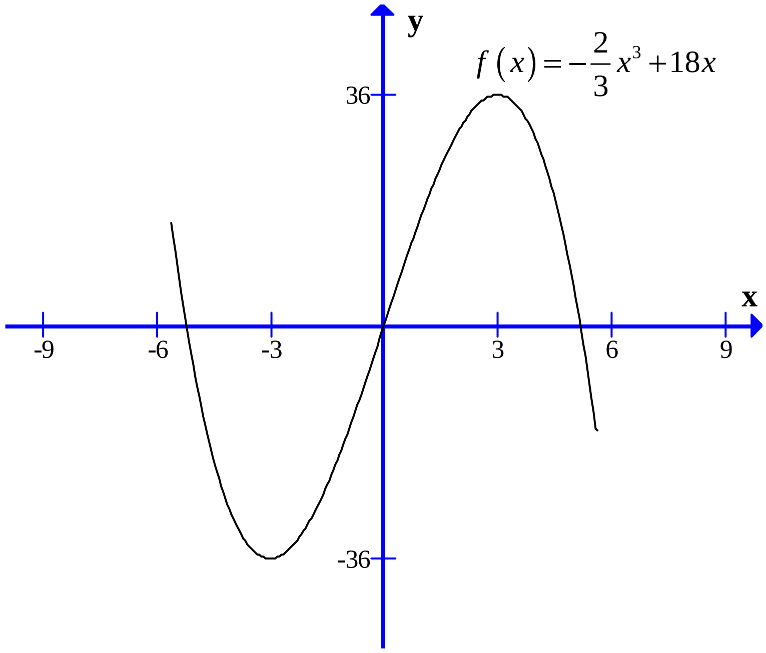
Έστω ότι f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f'(x_0)=0$.

- Αν $f''(x_0)\prec 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0.
- Αν $f''(x_0)\succ 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0.
- Αν $f''(x_0)=0$, τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε κανένα συμπέρασμα για το τι συμβαίνει με την f στο σημείο x_0 και πρέπει να κάνουμε χρήση της $1^{ης}$ παραγώγου.

<u>Παράδειγμα 1^o</u>: Να εξεταστούν για τοπικά ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις: α) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+18x$, β) $y=6x^4-8x^3+1$.

<u>Λύση</u>: α) $f'(x)=-2x^2+18=2(9-x^2)=2(3-x)(3+x)$. Για $f'(x_0)=0$ έχουμε τις κρίσιμες τιμές $x=\pm 3$.

Τώρα, $f''(x) = -4x$ και για $x = 3$, $f''(3) = -12 \prec 0$. Συνεπώς έχουμε τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 3$. Για $x = -3$, $f''(-3) = 12 \succ 0$. Συνεπώς έχουμε τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = -3$. (Βλέπε σχήμα 9).



Σχήμα 9

β) $y = 6x^4 - 8x^3 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x-1)$ Για $\frac{dy}{dx} = 0$ έχουμε τις κρίσιμες τιμές $x = 1$ και $x = 0$.

Τώρα $\frac{d^2y}{dx^2} = 72x^2 - 48x$ και, για $x = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24 \succ 0$. Οπότε έχουμε τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό.

Για $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Οπότε πρέπει να εξετάσουμε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$, στα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ 1)$.

Για $x \prec 0$, $\frac{dy}{dx} = (+)(-) = (-)$ οπότε η y είναι φθίνουσα.

Για $0 \prec x \prec 1$, $\frac{dy}{dx} = (+)(-) = (-)$ οπότε η y είναι και πάλι φθίνουσα. Άρα δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο $x = 0$. (Βλέπε σχήμα 8 πιο πάνω).

Σημείωση: Αν μια συνεχής συνάρτηση έχει μόνον ένα τοπικό ακρότατο σε ένα διάστημα, τότε αυτό είναι και ολικό ακρότατο στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα 2^o: Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα των συναρτήσεων: α) $y = x^2 - 5x + 6$ και β) $y = -4x^2 + 2x - 8$. Ποια από αυτά είναι ολικά ακρότατα;

Λύση: α) $y = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow y' = 2x - 5$ για $y' = 0$ έχουμε κρίσιμη τιμή την $x = \dfrac{5}{2}$. Τώρα $y'' = 2 \succ 0$, τόσο στο σημείο $x = \dfrac{5}{2}$, όσο και σε όλο τα σημεία. Επομένως έχουμε τοπικό ελάχιστο στο σημείο αυτό, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο, αφού είναι το μοναδικό ακρότατο μιας συνεχούς συνάρτησης.

β) $y = -4x^2 + 2x - 8 \Rightarrow y' = -8x + 2$ για $y' = 0$ έχουμε κρίσιμη τιμή την $x = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. Τώρα $y'' = -4 \prec 0$, οπότε έχουμε τοπικό και ολικό μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{1}{4}$.

Παράδειγμα 3^o: Θέλουμε να περιφράξουμε μια ορθογώνια περιοχή 10.800 τετραγωνικών μέτρων, από τις τρεις πλευρές της, τις δυο μικρότερες και τη μια από τις δυο μεγαλύτερες. Το κόστος για τις δυο μικρές πλευρές είναι 2 € το μέτρο και για τη μεγάλη 3 € το μέτρο. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος κάθε είδους της περίφραξης, ώστε το συνολικό κόστος να είναι ελάχιστο;

Λύση: Έστω ότι x είναι το μήκος της μεγάλης πλευράς και y, αυτό της μικρής. Τότε το συνολικό κόστος C για την περίφραξη θα είναι:

$$C = 3x + 2(2y) = 3x + 4y. \qquad (1)$$

Τώρα, αφού η συνολική επιφάνεια της περιοχής που πρέπει να περιφραχτεί είναι 10.800 τετραγωνικά μέτρα, έχουμε ότι $xy = 10.800$, ή $y = \dfrac{10.800}{x}$. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$C = 3x + 4\left(\frac{10.800}{x}\right) = 3x + \frac{43.200}{x}.$$

Για ελάχιστο κόστος θέτουμε $\dfrac{dC}{dx} = 0$ και παίρνουμε: $\dfrac{dC}{dx} = 3 - \dfrac{43.200}{x^2} = 0$ $\Rightarrow x^2 = \dfrac{43.200}{3} = 14.400 \Rightarrow x = \pm 120$. Άρα $x = 120$, (αφού πρέπει $x \succ 0$).

Έτσι $\frac{d^2C}{dx^2}=\frac{86.400}{x^3}$ και για $x=120$ $\left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=120}=\frac{86.400}{120^3}\succ 0$.

Επομένως έχουμε ελάχιστο στο σημείο $x=120$, απ' όπου παίρνουμε $y=\frac{10.800}{120}=90$.

Συνεπώς, το ελάχιστο κόστος περίφραξης, $C=3\times 120+4\times 90=720$ €, θα προκύψει αν η μεγάλη πλευρά έχει μήκος 120 μέτρα και η μικρές 90 μέτρα η κάθε μία.

4.5 Διαφορικά

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι $y=f\left(x\right)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής x, τότε το **διαφορικό της y**, που συμβολίζεται με dy ή $d\left[f\left(x\right)\right]$, δίνεται από τη σχέση:

$$dy=f'\left(x\right)\cdot h, \qquad (*)$$

όπου η h μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Η dy είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών, της x και h .

<u>Παράδειγμα 1^o</u>: Να βρεθούν τα διαφορικά των παρακάτω:

α) $f\left(x\right)=x^3-2x^2+3x-9$, όταν $x=2$ και $h=0,05$.

β) $f\left(x\right)=x$.

<u>Λύση</u>: α) $d\left[f\left(x\right)\right]=f'\left(x\right)\cdot h=\left(3x^2-4x+3\right)\cdot h$. Για $x=2$ και $h=0,05$ έχουμε:

$d\left[f\left(x\right)\right]=\left(3\left(2\right)^2-4\cdot 2+3\right)\cdot\left(0,05\right)=0,35$.

β) $f\left(x\right)=x\Rightarrow d\left[f\left(x\right)\right]=f'\left(x\right)\cdot h\Rightarrow d\left[x\right]=1\cdot h\Rightarrow dx=h$. Συνεπώς το διαφορικό του x είναι το h.

Από το πιο πάνω παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (*) για το διαφορικό της $y=f\left(x\right)$ ως εξής:

$$dy = d\left[f(x)\right] = f'(x)dx.$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>: Να υπολογιστούν τα διαφορικά των

α) $f(x)=\sqrt{x}$, β) $u=\left(x^2+3\right)^5$, γ) $u=e^{x^3+5}$.

<u>Λύση</u>: α) $d\left[f(x)\right]= f'(x)dx \Rightarrow d\left[f(x)\right]=d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)dx$

$d\left[f(x)\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

β) $u=\left(x^2+3\right)^5 \Rightarrow du=5\left(x^2+3\right)^4(2x)dx=10x\left(x^2+3\right)^4dx$.

γ) $u=e^{x^3+5} \Rightarrow du=3x^2e^{x^3+5}dx$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε πως, αν $y=f(x)$, τότε $dy=f'(x)dx$ και με την προϋπόθεση ότι $dx\neq 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε δια dx και να πάρουμε:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

που είναι η πρώτη παράγωγος της f.

Συνεπώς, η $\frac{dy}{dx}$ μπορεί να θεωρηθεί ως πηλίκο δυο διαφορικών, του dy διαιρούμενου δια του dx ή της παραγώγου της συνάρτησης f στο σημείο x.

4.5 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η 1η, 2η, 3η και 4η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $y=4x^2-12x^2+6x+5$, β) $y=4x^5-6x^3+6x^2+7x-12$,

γ) $y=-x-x^2$, δ) $y=\frac{1}{x}$, ε) $y=(2x+1)^4$, στ) $f(x)=x^2lnx$,

ζ) $\varphi(x)=ln\left[x(x+1)\right]$, η) $e^x-e^y=x^2+y^2$.

2. Να βρεθούν τα ακρότατα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιοριστεί αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα (τοπικά και ολικά).

α) $y = x^4 - 2x^2 + 4$, β) $y = x^3 - 12x + 1$, γ) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$,

δ) $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 32x$, στο διάστημα $[0, 12]$. Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. ε) $y = -x^7$.

3. Ένα ανοικτό κουτί, κατασκευάζεται από χαρτόνι κόβοντας τετράγωνα κομμάτια, 12 τετραγωνικών εκατοστών, από τις τέσσερις γωνίες του χαρτονιού και στη συνέχεια διπλώνοντας τις τέσσερις πλευρές του. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που πρέπει να κοπεί, ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι μέγιστος. Πόσος είναι ο όγκος αυτός;

4 Πρέπει να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο δοχείο, ανοικτό από πάνω, με τετράγωνη βάση και με όγκο 32 κυβικά μέτρα. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε το χρησιμοποιούμενο υλικό να είναι το ελάχιστο;

5. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των παρακάτω συναρτήσεων με όρους των x και dx:

α) $y = 3x - 8$, β) $f(x) = \sqrt{x^4 + 5}$, γ) $\psi = \frac{1}{x^2}$, δ) $u = ln\left(x^2 + 9\right)$,

ε) $y = (4x + 3)e^{2x^2+3}$.

6. Να υπολογιστεί η $d\left[f(x)\right]$ στις δεδομένες τιμές της x.

α) $f(x) = 4 - 9x, \quad x = 5, \quad dx = 0{,}3$.

β) $f(x) = 4x^2 - 3x + 10, \quad x = -1, \quad dx = 0{,}25$.

γ) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad x = 4, \quad dx = -0{,}1$.

δ) $f(x) = e^{x^2}, \quad x = 0, \quad dx = -0{,}01$.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο</u>

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Αν F είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F'(x)=f(x), \tag{1}$$

τότε η F καλείται *αντιπαράγωγος* (ή *παράγουσα*) της f, δηλαδή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση F, της οποίας η παράγωγος ισούται με την f. Τώρα πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) επί dx παίρνουμε: $F'(x)dx=f(x)dx$ ή $dF=f(x)dx$. Άρα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός</u>: Μια *αντιπαράγωγος*, δοθείσης συνάρτησης f, είναι μια άλλη συνάρτηση, τέτοια ώστε: $F'(x)=f(x)$ ή ισοδύναμα $dF=f(x)dx$.

Για παράδειγμα, αφού για την $f(x)=x^2$ έχουμε $f'(x)=2x$, η x^2 είναι μια αντιπαράγωγος της $2x$. Είναι όμως αυτή η αντιπαράγωγος η μοναδική; Προφανώς όχι, αφού για οποιαδήποτε $g(x)=x^2+C$, όπου C μια σταθερά έχουμε $g'(x)=2x$.

Η αντιπαράγωγος της $2x$ συμβολίζεται με $\int 2xdx$ και ονομάζεται το <u>*αόριστο ολοκλήρωμα*</u> αυτής και επειδή όλες οι αντιπαράγωγοι της $2x$ έχουν τη μορφή x^2+C, έχουμε: $\int 2xdx=x^2+C$.

Γενικά, το αόριστο ολοκλήρωμα μια συνάρτησης f, για την οποία ισχύει η (1) πιο πάνω, δίνεται από τη σχέση:

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{2}$$

όπου C είναι μια σταθερά. Η σχέση (2) ισχύει αν και μόνον αν ισχύει η σχέση (1).

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Να υπολογιστούν:

α) $\int 10dx$, β) $\int xdx$, γ) $\int 4xdx$.

Λύση: α) $\int 10dx = 10x + C$, όπου C είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $10x + C$ είναι ίση με 10.

β) $\int xdx = \frac{x^2}{2} + k$, όπου k είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $\frac{x^2}{2} + k$ είναι ίση με x.

γ) $\int 4xdx = 2x^2 + l$, όπου l είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $2x^2 + l$ είναι ίση με $4x$.

5.2 Βασικοί τύποι ολοκλήρωσης

(ix) $\int kdx = kx + C$, για κάθε σταθερά k.

(x) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x.

(xi) $\int e^u du = e^u + C$.

(xii) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k = σταθερά.

(xiii) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

(xiv) $\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$, αν $u \neq 0$.

(xv) $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$, $a \succ 0$, $a \neq 1$.

Παράδειγμα 2ο: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$, β) $\int \left(x^2 + 2x - 4 \right) dx$, γ) $\int y^2 \left(y + \frac{2}{3} \right) dy$.

δ) Αν $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$ και $y(1) = -1$, να βρεθεί η y, ε) $\int\left(\frac{x^3+x-1}{x^2}\right)dx$, στ) $\int\left(\frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}\right)dx$, ζ) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$,

η) $\int\sqrt{x^2-2x^4}\,dx$, θ) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$, ι) $\int\frac{dx}{2x-3}$.

<u>**Λύση**</u>: α) $\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1}+C = 2\sqrt{t}+C$.

β) $\int\left(x^2+2x-4\right)dx = \int x^2dx+2\int xdx-\int 4dx$

$$= \frac{x^3}{3}+c_1+x^2+c_2-4x+c_3 = \frac{x^3}{3}+x^2-4x+C,$$

όπου $C=c_1+c_2+c_3$.

γ) $\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy = \int\left(y^3+\frac{2}{3}y^2\right)dy = \frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{9}+k$.

δ) Αφού $y''=x^2-6$, έχουμε ότι $y'=\int\left(x^2-6\right)dx = \frac{x^3}{3}-6x+c_1$.

Τώρα $y'(0)=2 \Rightarrow 2=\frac{0^3}{3}-6(0)+c_1 \Rightarrow c_1=2$ και έτσι $y'=\frac{x^3}{3}-6x+2$, απ' όπου παίρνουμε:

$y=\int\left(\frac{x^3}{3}-6x+2\right)dx = \frac{x^4}{12}-3x^2+2x+c_2$ και αφού $y(1)=-1$ έχουμε ότι:

$-1=\frac{1^4}{12}-3(1)^2+2(1)+c_2 \Rightarrow c_2=-\frac{1}{12}$. Συνεπώς $y=\frac{x^4}{12}-3x^2+2x-\frac{1}{12}$.

ε)

$$\int\left(\frac{x^3+x-1}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+ln|x|+\frac{1}{x}+k.$$

στ) Διαιρώντας αριθμητή δια παρανομαστή της παράστασης μέσα στο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\int\left(\frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}\right)dx = \int\left(x^2+x+\frac{1}{2x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{1}{2x+1}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x+1}(2dx) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln|2x+1|+k\ .$$

ζ) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}(-2xdx) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C \ \Rightarrow$

$$\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{8}\left(1-x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C\ .$$

η) $\int\sqrt{x^2-2x^4}\,dx = \int x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-4xdx) =$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{6}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C\ .$$

θ) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}dx = \int\left(x^{-1/2}+2x^{1/2}+x^{3/2}\right)dx =$

$$= 2x^{1/2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C = 2\sqrt{x}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C\ .$$

ι) $\int\frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int\frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}ln|2x-3|+C\ .$

5.3 Τεχνικές ολοκλήρωσης

Πολλές φορές η ολοκλήρωση παραστάσεων είναι δύσκολη και επίπονη διαδικασία και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάνοντας απλά χρήση των γνωστών "τύπων", αλλά πρέπει να εφαρμόσουμε - επινοήσουμε διάφορα τεχνάσματα, ώστε να απλοποιήσουμε τις δεδομένες παραστάσεις με τρόπο που η ολοκλήρωση να γίνεται απλούστερη. Τέτοιες τεχνικές θα αναπτύξουμε παρακάτω.

1. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω ότι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα E_1 και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η αντι-παράγωγος της f στο E_1. Έστω ακόμη ότι $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα E_2 και $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο E_2 με $g(E_2)=E_1$. Τότε ισχύει ότι:

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx = F\left[g(x)\right]+C.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστούν τα εξής ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$, β) $\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2 dx$, γ) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$,

δ) $\int \frac{(lnx)^2}{x}dx$, ε) $\int \frac{(x+3)}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}dx$, στ) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx,\ |x|\le 1.$

<u>Λύση</u>: α) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$. Θέτουμε $t=g(x)$ και έχουμε:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = ln|t|+C.$$

β) $\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2 dx$. Θέτουμε $u=x^3+2$ και έτσι $du=3x^2dx$, οπότε έχουμε:

$$\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2 dx = \int \left(x^3+2\right)^2\left(3x^2dx\right) = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3+C =$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3+2\right)^3+C.$$

γ) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$. Θέτουμε $u=1-2x^2$ και έτσι $du=-4xdx$, οπότε έχουμε:

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = 3\left(-\frac{1}{4}\right)\int\left(1-2x^2\right)^{1/2}\left(-4xdx\right) = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}du =$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C \;=\; -\frac{1}{2}u^{3/2}+C \;=\; -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+C\,.$$

δ) $\int\frac{(lnx)^2}{x}dx$. Θέτουμε $u=lnx$, έτσι $du=\frac{1}{x}dx$ και κατά συνέπεια:

$$\int\frac{(lnx)^2}{x}dx=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(lnx)^3+C\,.$$

ε) $\int\frac{(x+3)}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+6x$, έτσι $du=(2x+6)dx$.

Οπότε παίρνουμε:

$$\int\frac{(x+3)}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+6x\right)^{-1/3}(2x+6)\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u^{2/3}+C=\frac{3}{4}\left(x^2+6x\right)^{2/3}+C\,.$$

στ) $\int\sqrt{4-x^2}dx,\ |x|\le 1$, θέτουμε $x=2\sin u$, οπότε $dx=(2\cos u)du$

και το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-4\sin^2u}\,(2\cos u)\,du=\int 2\sqrt{1-\sin^2u}\,(2\cos u)\,du=$$

$=4\int\cos^2u\,du$, [αφού $\sin^2u+\cos^2u=1$, (τριγωνομ. ιδιότητα)]

$=4\int\frac{1}{2}(1+\cos 2u)du$,

[αφού $\cos^2u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ (τριγωνομ. Ιδιότητα)]

$$=2\int du+2\int\cos 2u\,du=2\int du+\int(\cos 2u)d(2u)$$

$=2u+\sin 2u+C=2u+2\sin u\cdot\cos u+C$,

[αφού $\sin 2u=2\sin u\cdot\cos u$ (τριγωνομ. ιδιότητα)].

Τώρα αλλάζοντας τη μεταβλητή από u σε x έχουμε: $x=2\sin u\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin u = \frac{x}{2} \Rightarrow u = Arc\sin\frac{x}{2}.$$

Ακόμη $2\cos u = 2\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{4-4\sin^2 u} = \sqrt{4-x^2}$.

Συνεπώς, $\int \sqrt{4-x^2}dx = 2Arc\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$.

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Όταν έχουμε να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση, η οποία είναι γινόμενο δυο άλλων, τότε μπορεί το ολοκλήρωμα να απλοποιηθεί, αντικαθιστώντας τη μια εκ των δυο συναρτήσεων με την παράγωγο μιας τρίτης συνάρτησης. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε να ολοκληρώσουμε την $f(x)h(x)$ και ότι η $h(x)$ είναι παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης της $g(x)$.

Δηλαδή $g'(x) = h(x)$ ή $g(x) = \int h(x)dx$. Έτσι το ολοκλήρωμα της $f(x)h(x)$ είναι: $\int f(x)h(x)dx = \int f(x)g'(x)dx = \int f(x)d\left[g(x)\right]$.

Τώρα από τον κανόνα του πολλαπλασιασμού παραγώγισης συναρτήσεων έχουμε:

$$d\left[f(x)g(x)\right] = f(x)d\left[g(x)\right] + g(x)d\left[f(x)\right] \quad \Rightarrow$$

$$f(x)d\left[g(x)\right] = d\left[f(x)g(x)\right] - g(x)d\left[f(x)\right].$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\int f(x)d\left[g(x)\right] = \int d\left[f(x)g(x)\right] - \int g(x)d\left[f(x)\right]$$

$$= f(x)g(x) - \int g(x)d\left[f(x)\right] \Rightarrow$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int 2x\sin x dx$, β) $\int xe^x dx$, γ) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$, δ) $\int x^2 e^{2x+1}dx$.

<u>Λύση</u>: α) $\int 2x\sin x dx$, θέτουμε $f(x)=x$ και $g'(x)=\sin x dx$,

οπότε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=-\cos x$.

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int 2x\sin x dx = 2\left(f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx\right)$$

$$=2\left(-x\cos x-\int(-\cos x)dx\right)$$

$$=2\sin x-2x\cos x+C.$$

β) $\int xe^x dx$, θέτουμε $f(x)=x$ και $g'(x)=e^x dx$, οπότε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=e^x$.

Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int xe^x dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$$

$$=xe^x-\int e^x dx = e^x(x-1)+C.$$

γ) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$, θέτουμε $f(x)=lnx$ και $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, οπότε $d\left[f(x)\right]=\frac{1}{x}dx$

και έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$$

$$=(lnx)\left(2\sqrt{x}\right)-2\int x^{1/2}\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=2\sqrt{x}lnx-2\int x^{-1/2}dx = 2\sqrt{x}lnx-2\left(2\sqrt{x}\right)+C$$

$$=2\sqrt{x}(lnx-2)+C.$$

δ) Θέτουμε $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{2x+1}dx$ και παίρνουμε $d\left[f(x)\right]=2xdx$ και $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2xdx)$$

$$= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}dx .$$

Τώρα για το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης, θέτουμε $f(x)=x$ και $g(x)=e^{2x+1}dx$, οπότε παίρνουμε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{2}$ και έχουμε:

$$\int xe^{2x+1}dx = \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}dx .$$

$$= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1$$

Έτσι για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C,$$ (όπου $C=-C_1$) ή

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C .$$

3. Η μέθοδος των απλών κλασμάτων

Στις περιπτώσεις όπου η προς ολοκλήρωση παράσταση είναι μια ρητή συνάρτηση: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και ο βαθμός της $p(x)$ είναι μικρότερος από αυτόν της $q(x)$, τότε αναλύουμε τον παρονομαστή σε γραμμικούς παράγοντες διαφορετικούς μεταξύ τους. Στη συνέχεια η ρητή συνάρτηση γράφεται σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, τα οποία ολοκληρώνονται ευκολότερα.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$, β) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$, γ) $\int \frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx$, δ) $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}dx$.

<u>Λύση</u>: α) $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$, γράφουμε τον παρονομαστή σαν γινόμενο παραγόντων και έχουμε: $\frac{x+35}{x^2-25}=\frac{x+35}{(x+5)(x-5)}$, τώρα έστω ότι $A,B\in\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x+35}{(x+5)(x-5)}=\frac{A}{(x+5)}+\frac{B}{(x-5)}$$

$$\Rightarrow x+35=A(x-5)+B(x+5)$$

$$\Rightarrow x+35=(A+B)x-5A+5B.$$

Η σχέση αυτή είναι ταυτότητα και ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}A+B=1\\ 5B-5A=35\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A+B=1\\ B-A=7\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A+B=1\\ B=7+A\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}A+B=1\\ B=7+A\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2A=-6\\ B=7+A\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=-3,\ \ B=4.$$

Έτσι για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int\frac{x+35}{x^2-25}dx=\int\frac{4}{x-5}dx-\int\frac{3}{x+5}dx$$

$$=4ln|x-5|-3ln|x+5|+C.$$

β) $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx$, γράφοντας τον παρονομαστή ως γινόμενο παραγόντων: $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}$ και έστω ότι $\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$.

Έτσι έχουμε: $1=A(x+a)+B(x-a)\Rightarrow 1=(A+B)x+a(A-B)\ \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix}A+B=0\\ a(A-B)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}A=-B\\ -2B=\frac{1}{a}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=-\frac{1}{2a},\ \ A=\frac{1}{2a}.$$

Συνεπώς για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[ln|x\text{-}a| - ln|x+a|\right] + C\,.$$

γ) $\displaystyle\int \frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx$, ο παρονομαστής είναι γινόμενο παραγόντων, δηλαδή

$\displaystyle\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)}$ και έτσι $\displaystyle\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{x-3} \Rightarrow$

$$\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+\Gamma x(x+1)}{x(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+\Gamma x(x+1) \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = A\left(x^2-2x-3\right)+B\left(x^2-3x\right)+\Gamma\left(x^2+x\right) \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = x^2(A+B+\Gamma)-x(2A+3B-\Gamma)-3A \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+\Gamma &= 4 \\ 2A+3B-\Gamma &= 14 \\ 3A \qquad\quad &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B+\Gamma &= 4 \\ 6+4B \quad &= 18 \\ A \qquad\quad &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=2, \;\; ,B=3, \quad \Gamma=-1\,.$$

Συνεπώς για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int\frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-3}\right)dx = \int\frac{2}{x}dx+\int\frac{3}{x+1}dx-\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$= 2ln|x|+3ln|x+1|-ln|x-3|+C = ln\left|\frac{x^2(x+1)^3}{x-3}\right|+C\,.$$

δ) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{3x^2-27}dx = \frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2-9}dx$. Τώρα $\displaystyle\frac{2x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-3)}$ και

$$2x+1 = A(x-3)+B(x+3) \Rightarrow 2x+1 = (A+B)x-3(A-B) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ A-B=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=2-B \\ -2B=-\dfrac{1}{3}-2 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\frac{7}{6},\quad A=\frac{5}{6}.$$

Συνεπώς, για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2-9}dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{5/6}{x+3}dx + \int \frac{7/6}{x-3}dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}ln|x+3| + \frac{7}{6}ln|x-3|\right] + C$$

$$= \frac{1}{18}ln\left|(x+3)^5 + (x-3)^7\right| + C.$$

5.4 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int x^2e^x dx$, β) $\int x^2e^{-2x}dx$, γ) $\int t^3 lnt dt$, δ) $\int x\sqrt{x+1}dx$, ε) $\int \frac{ln(x+1)}{2(x+1)}dx$, στ) $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)^{3/4}dx$.

2. Με τη μέθοδο των απλών κλασμάτων να υπολογιστούν τα εξής:

α) $\int \frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}dx$, β) $\int \frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}dx$ (υπόδειξη: το κλάσμα να γραφεί ως εξής: $\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}$).

γ) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$, δ) $\int \frac{3x+8}{x^2+2x}dx$, ε) $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}dx$.

3. Να υπολογιστούν τα εξής ολοκληρώματα:

α) $\int sin^2x cosx dx$, β) $\int cos3x dx$, γ) $\int tanx dx$, δ) $\int tan2x dx$, ε) $\int xcotx^2dx$, στ) $\int secxdx$, ζ) $\int \frac{sinx+cosx}{cosx}dx$,

η) $\int \frac{1}{csc2x-cot2x}dx$, θ) $\int \frac{secxtanx}{a+bsecx}dx$.

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, β) $\int \frac{1}{4x^2+9}dx$, γ) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}dx$,

δ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$, ε) $\int \frac{x}{x^4+3}dx$, στ) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$,

ζ) $\int \frac{(2x-7)}{x^2+9}dx$, η) $\int \frac{1}{x^2+10x+30}dx$.

5.5 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u>: Το <u>*ορισμένο ολοκλήρωμα*</u> μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a,\ b]$, δίνεται από τη σχέση:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

όπου $F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f(x)$ στο διάστημα αυτό.

Τα σημεία a και b ονομάζονται το κάτω και άνω <u>όριο</u> ή <u>άκρο</u> του ολοκληρώματος αντίστοιχα..

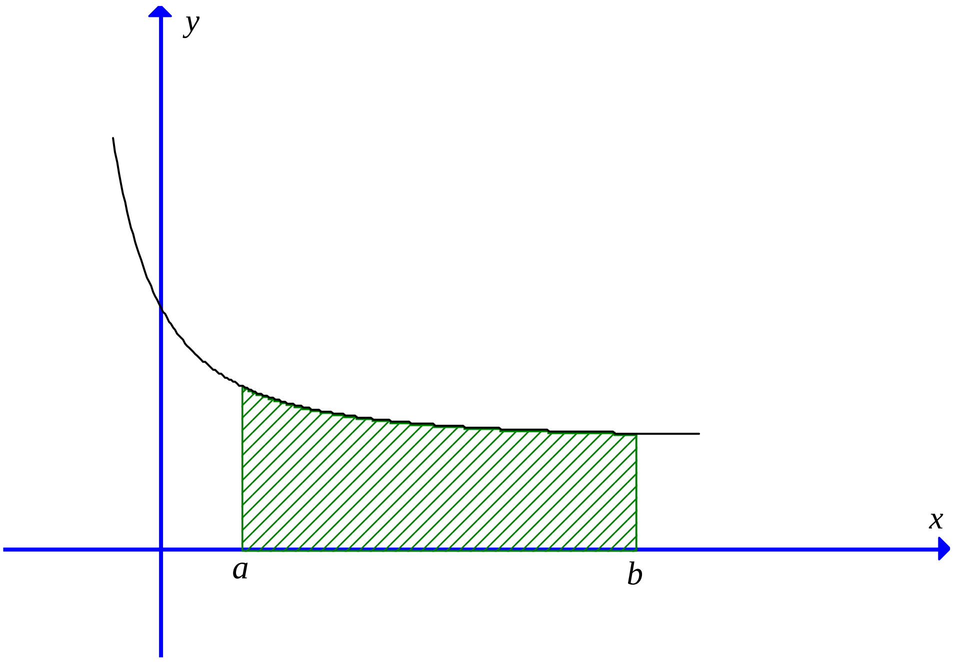
Για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)dx$, κάνουμε τα εξής:

- Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$, δηλαδή την $F(x)$.
- Αντικαθιστούμε στην $F(x)$ τη x με το άνω άκρο b, δηλαδή $F(b)$.
- Αντικαθιστούμε στην $F(x)$ τη x με το κάνω άκρο a, δηλαδή $F(a)$.
- Αφαιρούμε την $F(a)$ από την $F(b)$.

Σημείωση: Κατά την αντικατάσταση των ορίων στο ολοκλήρωμα και την αφαίρεση $F(a)-F(b)$ η σταθερά ολοκλήρωσης χάνεται, εξ ου και ο όρος ορισμένο ολοκλήρωμα.

Ακόμη, επειδή η μεταβλητή αυξάνει από κάτω προς τα πάνω, το κάτω όριο είναι μικρότερο από το άνω, δηλαδή $a \prec b$. Πρέπει συνεπώς να προσέχουμε ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που έχουμε αρνητικά πρόσημα στα όρια ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα αν τα όρια είναι 0 και -1, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Πολλές είναι οι πρακτικές εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος. Μια εξ αυτών είναι και ο υπολογισμός του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται μεταξύ της "καμπύλης" που δίνει το γράφημα της συνάρτηση $y=f(x)$, του άξονα των x και των γραμμών $x=a$ και $x=b$, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές στο διάστημα $[a,\ b]$. (Βλ. σχήμα 1 παρακάτω).



Σχήμα 1

Παράδειγμα 1^{o} : Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 (4-x^2)dx$, β) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$, γ) $\int_0^1 e^{3t}dt$, δ) $\int_{-2}^{1} x^3 dx$.

Λύση: α) $\int_0^2 (4-x^2)dx = \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{16}{3}$.

β) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx = \int_0^1 x^3 \left(1+x^4\right)^{-1/2} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1+x^4\right)^{-1/2} \left(4x^3 dx\right) =$

$$\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\left(1+x^4\right)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1+x^4\right)^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

γ) $\int_0^1 e^{3t} dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t} (3dt) = \left(\frac{1}{3}\right) e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^3 - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right).$

δ) $\int_{-2}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$

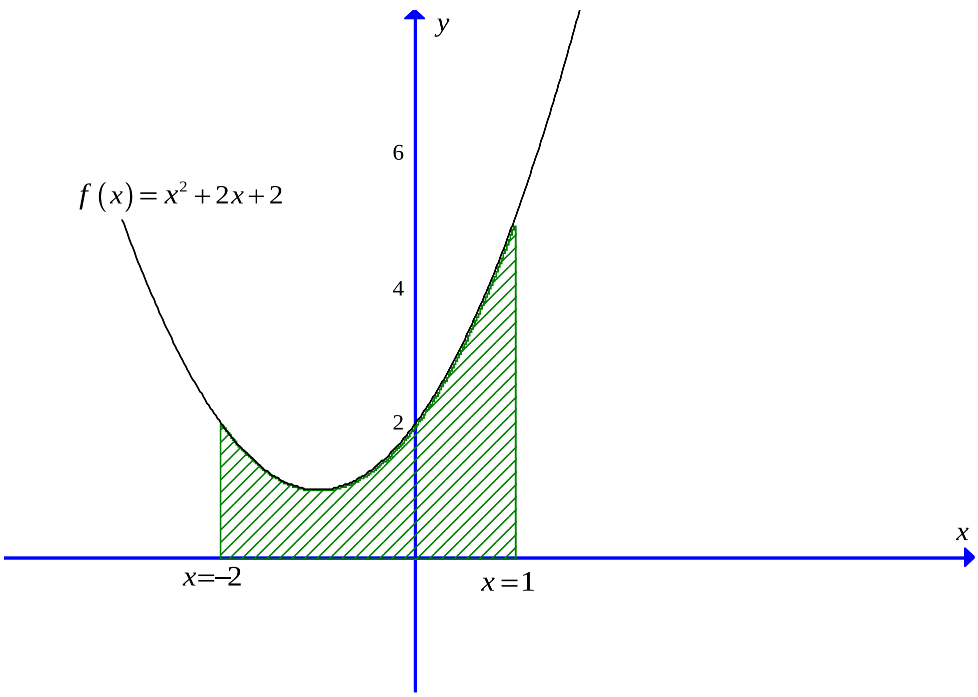
<u>Παράδειγμα 2ο</u> : Να υπολογιστεί το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη: $f(x) = x^2 + 2x + 2$, του άξονα των x και των γραμμών $x = -2$ και $x = 1$.

<u>Λύση</u>: Στο σχήμα 2 παρακάτω βλέπουμε το ζητούμενο εμβαδόν. Για τον υπολογισμό του αρκεί να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$\int_{-2}^1 \left(x^2 + 2x + 2\right) dx$. Έχουμε: $\int_{-2}^1 \left(x^2 + 2x + 2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^1 \Rightarrow$

$$\int_{-2}^1 \left(x^2 + 2x + 2\right) dx = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(\frac{8}{3} + 4 - 4\right) = 6.$$

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι 6 τετραγωνικές μονάδες.



Σχήμα 2

5.6 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

1. Αν $F(x)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$, a και b το κάτω και άνω όριο του ολοκληρώματος αντίστοιχα, τότε αλλάζοντας τα όρια έχουμε:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$$

Δηλαδή η αμοιβαία αλλαγή των ορίων ενός ορισμένου ολοκληρώματος αλλάζει απλώς το πρόσημο του.

2. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,\ b]$ και k ένας πραγματικός αριθμός, τότε $kf(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$ και

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a,\ b]$, τότε το άθροισμά τους είναι επίσης μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + \cdots + f_n(x) \right] dx = \int_a^b f_1(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

4. Αν $a \prec c \prec b$ και $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στα διαστήματα $[a,\ c]$ και $[c,\ b]$, τότε η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,\ b]$ και ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα κλειστό διαστήματα και $a,\ b,\ c$ τρεις οποιοιδήποτε αριθμοί στο διάστημα αυτό, τότε ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διαστήματα $[a,\ b]$, με $f(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [a,\ b]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διαστήματα $[a,\ b]$, με $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,\ b]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$$

8. Θεώρημα Μέσης Τιμής: Αν $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,\ b]$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $z \in (a,\ b)$, τέτοιος ώστε:

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a).$$

Η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο z, ονομάζεται **μέση τιμή** της συνάρτησης, συμβολίζεται με $\overline{f}$, δηλαδή $\overline{f} = f(z)$ και δίνεται από τη σχέση:

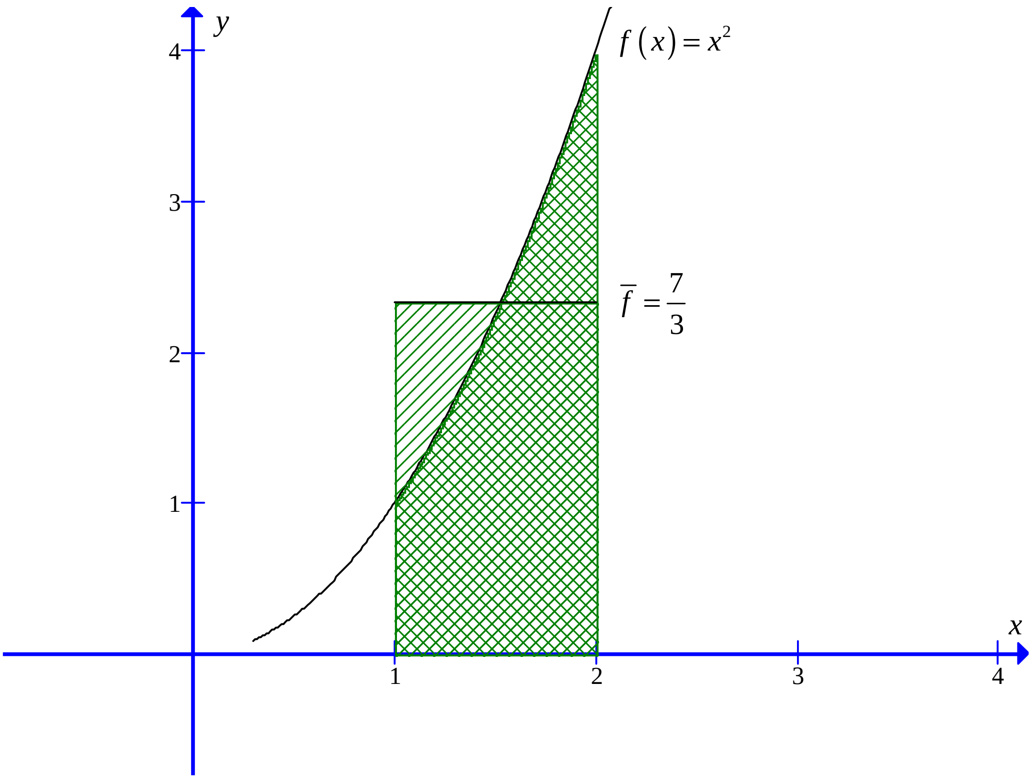
$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

<u>**Παράδειγμα**</u>: Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[1,\ 2]$ και να εξηγηθεί γεωμετρικά.

<u>**Λύση**</u>: $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \overline{f} = \dfrac{1}{2-1}\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^2 = \dfrac{7}{3}.$

Αφού $\dfrac{1}{2-1}\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \dfrac{7}{3}$, έχουμε ότι $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \dfrac{7}{3}(2-1)$.

Το ολοκλήρωμα αυτό δίνει το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης $f(x) = x^2$ και του άξονα των x, από $x = 1$ έως $x = 2$. Το εμβαδόν αυτό, $\dfrac{7}{3}(2-1)$, είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει ύψος $\overline{f} = \dfrac{7}{3}$ και πλάτος $b - a = 2 - 1 = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

5.7 Μέτρηση του μήκους μιας καμπύλης γραμμής

Μια συνάρτηση f είναι λεία σε ένα διάστημα αν έχει συνεχή παράγωγο f' σε όλο το διάστημα. Αυτό σημαίνει πως μια μικρή αλλαγή στη μεταβλητή x προξενεί μικρή αλλαγή στην κλίση $f'(x)$ της εφαπτομένης γραμμής της καμπύλης του γραφήματος της f. Κατά συνέπεια δεν υπάρχουν "γωνίες" στο γράφημα μιας λείας συνάρτησης.

Αν f είναι μια λεία συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\ b]$, τα σημεία $A(a,\ f(a))$ και $B(b,\ f(b))$ ονομάζονται άκρα σημεία του γραφήματος της f.

Ορισμός: Αν μια συνάρτηση f είναι λεία σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\ b]$, τότε το μήκος του τόξου του γραφήματος της f, από το σημείο $A(a,\ f(a))$ στο σημείο $B(b,\ f(b))$, δίνεται από τη σχέση:

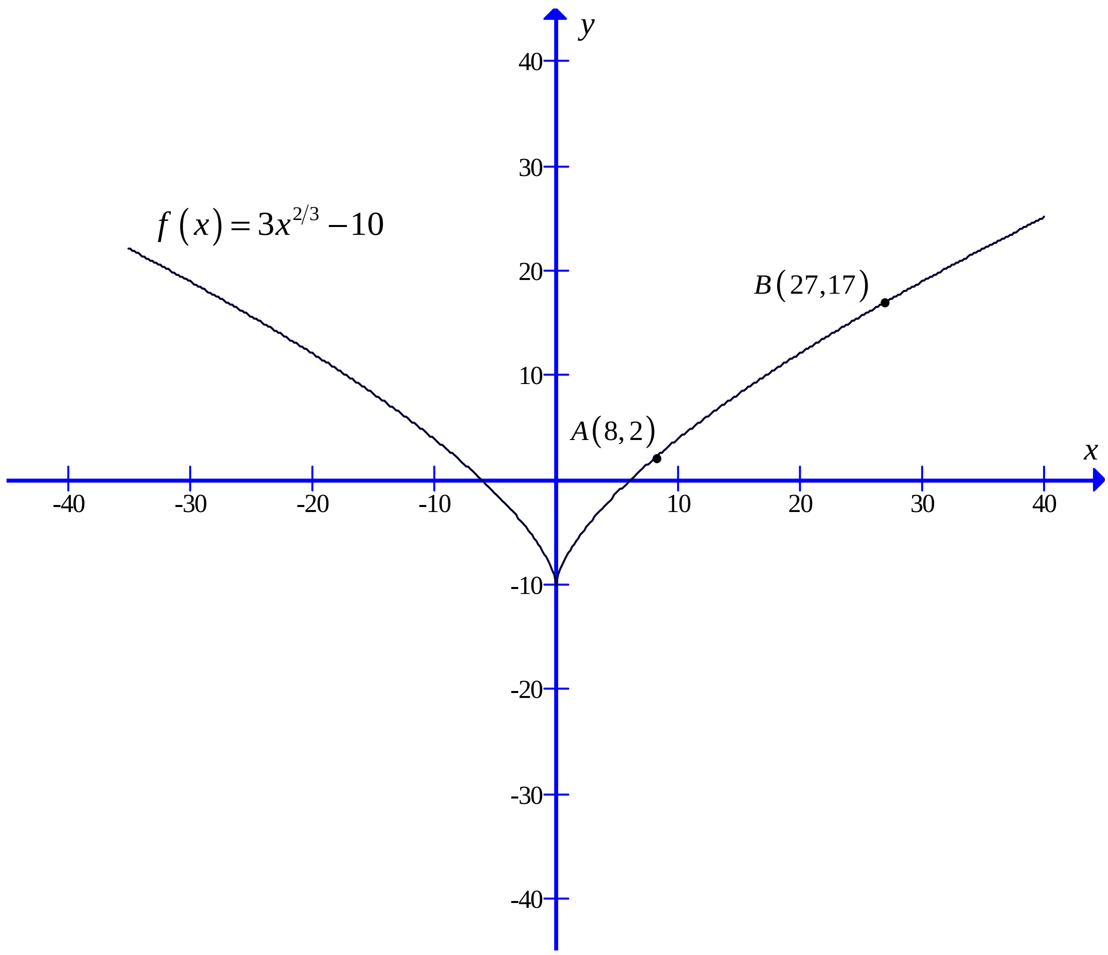
$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Αν μια συνάρτηση ορίζεται από τη σχέση: $x = g(y)$, όπου g είναι μια λεία συνάρτηση σε ένα διάστημα $[c,\ d]$, τότε το μήκος του τόξου του γραφήματος της g, από το σημείο $C\big(g(c),\ c\big)$ στο σημείο $D\big(g(d),\ d\big)$, δίνεται από τη σχέση:

$$L_c^d = \int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου του γραφήματος της $f(x) = 3x^{2/3} - 10$ από το σημείο $A(8,\ 2)$ στο σημείο $B(27,\ 17)$.

<u>Λύση</u>: Στο σχήμα 4 πιο κάτω βλέπουμε το γράφημα της f.



Σχήμα 4

Τώρα η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 2x^{-1/3} = \dfrac{2}{x^{1/3}}$.

Έτσι το ζητούμενο μήκος δίνεται από το:

$$L_8^{27} = \int_8^{27} \sqrt{1+\left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx = \int_8^{27} \sqrt{1+\frac{4}{x^{2/3}}} dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{x^{2/3}+4}}{x^{1/3}} dx .$$

Θέτουμε $u = x^{2/3} + 4$ και έτσι $du = \left(\dfrac{2}{3}\right) x^{-1/3} dx = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{x^{1/3}}\right) dx$. Οπότε το πιο πάνω ολοκλήρωμα γράφεται:

$$L_8^{27} = \frac{3}{2}\int_8^{27} \sqrt{x^{2/3}+4}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{1/3}}\right) dx .$$

Όταν $x = 8$, $u = 8^{2/3} + 4 = 8$ και όταν $x = 27$, $u = 27^{2/3} + 4 = 13$.

Άρα έχουμε:

$$L_8^{27} = \frac{3}{2}\int_8^{13} \sqrt{u}\, du = \frac{3}{2}\int_8^{13} u^{1/2} du$$

$$= u^{3/2}\Big|_8^{13} = 13^{3/2} - 8^{3/2} \cong 24,24.$$

5.8 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα: α) $\int_1^2 \dfrac{x}{\sqrt{4-x}} dx$, β) $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$, γ) $\int_1^2 xlnxdx$, δ) $\int_0^1 (2x+1)\left(x^2+x\right)^4 dx$, ε) $\int_{-2}^1 \left(t^4 - t + 1\right) dt$, στ)

2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ της συνάρτησης $f(x) = 6 - x - x^2$ και του άξονα των x.

3. Να βρεθεί η μέση τιμή των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα διαστήματα:
α) $f(x) = x^2$ στο $[0,\ 4]$, β) $f(x) = 2 - 3x^2$ στο $[-1,\ 2]$, γ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $[2,\ 4]$, δ) $f(t) = 4t^3$ στο $[-2,\ 2]$, στ) $f(x) = 3x - 1$ στο $[1,\ 2]$.

4. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της παραβολής $y=\frac{x^2}{4}$, από το σημείο $x=1$ έως το σημείο $x=3$.

5. Να υπολογιστεί το μήκος της πάνω ημιπεριφέρειας του κύκλου $x^2+y^2=r^2$.

<u>Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α</u>

1. **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΩΝ**
2. **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ**
3. **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**
4. **ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ**

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΩΝ

Για $a,b\in \mathbb{R}$, με $a,b\succ 0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$
- $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$
- $\left(ab\right)^x=a^x b^x$
- $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}, \quad a^0=1$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Για $a,b\in \mathbb{R}$, με $a,b,y\succ 0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- $y=log_a x \iff a^y=x$
- $log_a x_1x_2=log_a x_1+log_a x_2$
- $log_a \dfrac{x_1}{x_2}=log_a x_1 - log_a x_2$
- $log_a x^r=rlog_a x$
- $log_a b=\dfrac{log_c b}{log_c a}$
- $lnx=log_e x, \quad \left(e=2,71828...\right)$

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$
- $\tan^2\vartheta + 1 = \sec^2\vartheta$
- $\cot^2\vartheta + 1 = \csc^2\vartheta$
- $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$
- $\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta)$
- $\cos^2\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\vartheta)$

4. ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

- **Μορφές που περιέχουν** $(a+bu)$

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$

2. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} ln\left|a+bu\right| + C.$

3. $\int \frac{udu}{a+bu} = \frac{u}{b} - \frac{a}{b^2} ln\left|a+bu\right| + C.$

4. $\int \frac{u^2du}{a+bu} = \frac{u^2}{2b} - \frac{au}{b^2} ln\left|a+bu\right| + C.$

5. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\int \frac{udu}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(ln\left|a+bu\right| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\int \frac{u^2du}{(a+bu)^2} = \frac{u}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bu)} - \frac{2a}{b^3} ln\left|a+bu\right| + C.$

9. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2} ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \frac{2b}{a^3} ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\int \frac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak} + ln\left|\frac{a+bu}{c+ku}\right| + C.$

12. $\int \frac{udu}{(a+bu)(c+ku)} = \frac{1}{bc-ak}\left[\frac{c}{k} ln\left|c+ku\right| - \frac{a}{b} ln\left|a+bu\right|\right] + C.$

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a+bu}$

13. $\int u\sqrt{a+bu}du = \frac{2(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}}{15b^2}+C$.

14. $\int u^2\sqrt{a+bu}du = \frac{2\left(8a^2-12abu+15b^2u^2\right)(a+bu)^{3/2}}{105b^3}+C$.

15. $\int \frac{udu}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2}+C$.

16. $\int \frac{u^2du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2\left(3b^2u^2-4abu+8a^2\right)\sqrt{a+bu}}{15b^3}+C$.

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C,\ a\succ 0$.

18. $\int \frac{\sqrt{a+bu}du}{u} = 2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a^2-u^2}$

19. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$.

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+C$.

21. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}+C$.

22. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}du}{u} = \sqrt{a^2-u^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+C,\ a\succ 0$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$.

24. $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

25. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$.

26. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

28. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C$.

29. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$.

30. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\mp\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$.

31. $\int \left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2} du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm 5a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

32. $\int \frac{du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$.

33. $\int \frac{u^2 du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\left(a^2-u^2\right)$ και $\left(u^2-a^2\right)$

34. $\displaystyle\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$.

35. $\displaystyle\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$.

- **Εκθετικές και λογαριθμικές μορφές**

36. $\displaystyle\int e^u du=e^u+C$.

37. $\displaystyle\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C,\ a\succ 0,\ a\neq 1$.

38. $\displaystyle\int ue^{au}du=\frac{e^{au}}{a^2}(au-1)+C$.

39. $\displaystyle\int u^n e^{au}du=\frac{u^n e^{au}}{a}-\frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$.

40. $\displaystyle\int\frac{e^{au}du}{u^n}=-\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int\frac{e^{au}du}{u^{n-1}}$.

41. $\displaystyle\int\ln u\,du=u\ln u-u+C$.

42. $\displaystyle\int u^n\ln u\,du=\frac{u^{n+1}\ln u}{n+1}-\frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}+C,\ n\neq -1$.

43. $\displaystyle\int u^n\ln^m u\,du=\frac{u^{n+1}\ln^m u}{n+1}-\frac{m}{n+1}\int u^n\ln^{m-1}u\,du,\ m,n\neq -1$.

44. $\int \frac{du}{u\ln u} = \ln\left|\ln u\right| + C$.

45. $\int \frac{du}{a+be^{cu}} = \frac{1}{ac}\left(cu - \ln\left|a+be^{cu}\right|\right) + C$.

- **Διάφορες μορφές**

46. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+u} + \sqrt{b+u}\right) + C$.

47. $\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C$.

48. $\int \sqrt{a+bu+cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} -$

$$-\frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}}\ln\left|2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right| + C,\ c \succ 0.$$

49. $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$.

50. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$.

51. $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$.

52. $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

54. $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\tan x + C$.

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = Arc\sec x + C$.

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = Arc\sin\frac{x}{2} + C$.

57. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} Arc\tan\frac{x}{3} + C$.

58. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2} Arc\cos\frac{1}{x^2} + C$.

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

60. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} Arc\tan\frac{2x}{3} + C$.

61. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

62. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

63. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

64. $\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$.

65. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$.

66. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

67. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$.

68. $\int x\cos x dx = -x\sin x + \cos x + C$.

69. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

70. $\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$.

71. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$.

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = Arc\sin\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

73. $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} Arc\tan\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

74. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = Arc\sin e^x + C$.

75. $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{4x}} = \frac{1}{2} Arc\tan e^{2x} + C$.

76. $\int Arc\tan x dx = xArc\tan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$.

77. $\int Arc\cos 2x dx = xArc\cos 2x - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$.

78. $\int xArc\tan x dx = \frac{\left(x^2+1\right)}{2} Arc\tan x - \frac{x}{2} + C$.

79. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

80. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

81. $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

82. $\int \sqrt{4-x^2} dx = 2Arc\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$.

83. $\int \sin^3 x dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \sin^2 x\cos x + C$.

84. $\int x^3\sin x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$.

85. $\int \sin x\sin 3x dx = \frac{1}{8}\sin 3x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos 3x + C$.

86. $\int e^{2x}\cos 3x dx = Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x + C$.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. **ΖΑΓΟΥΡΑΣ Χ. Γ. - ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. Ν.,** *Γενικά Μαθηματικά Ι,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2003.

2. **ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ Ε., ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗΣ ΑΡ., ΣΑΣΑΛΛΟΣ ΣΠ.,** *Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία,* (Τόμος Α), Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1994.

3. **ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ Ε., ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗΣ ΑΡ., ΣΑΣΑΛΛΟΣ ΣΠ.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* (Τόμος Β), Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1994.

4. **ΚΑΠΠΟΥ Δ.,** *Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, 1962.

5. **ΛΕΓΑΤΟΣ ΓΕΡ.,** *Ανάλυση (Μαθηματικά Ι - τόμος 2),* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1990.

6. **ΝΤΟΥΓΙΑ Σ.,** *Απειροστικός Λογισμός 1,* Ιωάννινα, 1984.

7. **ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ε., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ι., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Α.,** *Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1995.

8. **ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ε., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ι.,** *Θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης Γενικών,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1998.

9. **ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1990.

10. **ΦΡΑΓΚΟΣ Χ.,** *Ανώτερα Μαθηματικά,* Εκδόσεις Αθαν. Σταμούλης, Αθήνα, 1999.

11. **APOSTOL T. M.,** *Calulus,* 2^{nd} Ed., John Wiley and Sons, Vol. 1,2, New York 1990.

12. **AYRES F. JR.,** *Differential and Integral Calculus,* 2^{nd} Edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.

13. **GOLDSTEIN L., LAY D., SCHNEIDER D.,** *Calculus and its Applications,* Prentice Hall International Editions, 1993.

14. **HOLDER L. I., DEFRANZA J., PARACHOFF J. M.,** *Calculus,* 2^{nd} Edition, Brooks-Cole Publishing Company.

15. **LARSON R. E., HOSTETLER R. P., EDWARDS B. H.,** *Calculus with Analytic Geometry,* 5th Edition, D.C. Heath and Co., 1994.

16. **PARZYNSKI W.,** *Introduction to Mathematical Analysis,* London, 1992.

17. **PROTTER M., MORREY CH.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός με Αναλυτική Γεωμετρία,* (Τόμοι Α & Β), Εκδόσεις Παπαζήση.

18. **SPIEGEL M. R.,** *Advanced Calculus,* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1963.

19. **STEIN S. K., BARCELLOS A.,** *Calculus and Analytic Geometry,* 5th Edition, McGraw-Hill, Inc., 1992.

20. **STEWART J.,** *Calculus,* 3rd Edition, Brooks-Cole Publishing Company, 1995.

21. **THOMAS,** Απειροστικός λογισμός, ΤΟΜΟΣ ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004.