ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

M.Sc. PROGRAM

"ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ"

Ι. ΚΟΥΓΙΑΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΝΤΙΡΡΙΟ 2013-2014

Π Ε Ρ Ι Ε ΧΟ Μ Ε Ν Α

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο</u>

ΟΡΙΣΜΟΙ – Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1.1 ΕΙΔΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πολλά μαθηματικά μοντέλα που προκύπτουν σε προβλήματα της φυσικής, χημείας, βιολογίας, τηλεπικοινωνιών, οικονομίας και πολλών άλλων κλάδων, περιλαμβάνουν την αναζήτηση μιας άγνωστης συνάρτησης που ικανοποιεί μια εξίσωση, στην οποία εμφανίζεται η παράγωγος της συνάρτησης αυτής και η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος. Τέτοιες εξισώσεις ονομάζονται **διαφορικές εξισώσεις**. Βλέπουμε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y \tag{2}$$

$$\left(x^2 - y^2\right)dy + 4xydx = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^3 = xy\frac{du}{dx} - u \tag{5}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf \tag{6}$$

$$y'' + 5\left(y'\right)^3 = 6y \tag{7}$$

$$x''' + xx' - 3xy = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = x \tag{9}$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = Ew\cos wt \tag{10}$$

Όταν μια διαφορική εξίσωση περιέχει μια ή περισσότερες παραγώγους ως προς μια συγκεκριμένη μεταβλητή x, τότε η x ονομάζεται *ανεξάρτητη* μεταβλητή. Ενώ, μια μεταβλητή, π.χ. η y ονομάζεται *εξαρτημένη* μεταβλητή, αν στην εξίσωση εμφανίζεται η παράγωγος αυτής.

Για παράδειγμα, στην εξίσωση (1) πιο πάνω, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x και η εξαρτημένη είναι η y, ενώ ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει στην εξίσωση (8).

Σε ορισμένες περιπτώσεις εμφανίζονται και άλλες ποσότητες, που ονομάζονται *παράμετροι*, όπως για παράδειγμα στην εξίσωση (10) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η t, η εξαρτημένη είναι η i, ενώ οι L, R, C, E και w είναι παράμετροι. Παράμετρο περιέχουν επίσης οι εξισώσεις (2) και (6), που είναι η k.

Η εξίσωση (3) μπορεί να γραφεί είτε:

$$\left(x^2 - y^2\right)\frac{dy}{dx} + 4xy = 0,$$

οπότε η y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και η x είναι η ανεξάρτητη, είτε

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{4y} - \frac{y}{4x} = 0,$$

οπότε η x είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και η y είναι η ανεξάρτητη.

Όταν μια εξίσωση περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους κάποιων μεταβλητών, ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**, ή απλά **διαφορική εξίσωση**, Δ.Ε. χάριν συντομίας, ενώ όταν περιέχει μερικές παραγώγους, ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση**, (Μ.Δ.Ε. χάριν συντομίας) .

Ορισμός: *Τάξη* μιας Δ.Ε. είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Για παράδειγμα η εξίσωση:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2k\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = -y,$$

είναι μια Δ.Ε. δεύτερης τάξης.

Γενικότερα, η εξίσωση:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{11}$$

είναι μια Δ.Ε. $n-$στής τάξης, για την οποία κάτω από κατάλληλες συνθήκες στη συνάρτηση F, η εξίσωση (11) μπορεί να επιλυθεί ως προς $y^{(n)}$, συναρτήσει των άλλων $n+1$ μεταβλητών, $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ και να πάρουμε τη Δ.Ε.:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{12}$$

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $\varphi(x)$ που ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $x \in (a,\ b)$, ονομάζεται <u>*λύση*</u> μιας Δ.Ε., όπως αυτή της μορφής (12), αν οι n παράγωγοι της φ υπάρχουν στο διάστημα $(a,\ b)$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right),$$

για κάθε $x \in (a,\ b)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Η συνάρτηση $y = f(x) = e^{2x}$ είναι μια λύση της Δ.Ε.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6y, \tag{13}$$

αφού $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}$ και $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x}$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 4e^{2x} + 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6y,$$

δηλαδή η συνάρτηση $y = f(x) = e^{2x}$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. (13) και είναι έτσι μια λύση αυτής.

<u>Ορισμός</u>: Μια Δ.Ε.

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

ονομάζεται **γραμμική**, αν η F είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $y, y', \ldots, y^{(n)}$.
Σε αντίθετη περίπτωση, η Δ.Ε. ονομάζεται **μη-γραμμική**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2k\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = -y$$

είναι μια μη γραμμική Δ.Ε., ενώ η

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^3 - a^2\right)y = 2x^4$$

είναι μια γραμμική Δ.Ε.

Η γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, τάξης n, είναι η εξής:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x). \tag{14}$$

1.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για κάθε μια από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να προσδιοριστεί αν είναι συνήθης ή μερική, γραμμική ή μη-γραμμική, καθώς και η τάξη της.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$,
2. $y''' - 3y' + 2y = 0$,
3. $y'' + 2y' - 6y = \cos x + x^2$,
4. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,

5. $v\dfrac{d^2u}{dt^2}-u\dfrac{d^2v}{dt^2}=C$,

6. $\left(\dfrac{d^3u}{dx^3}\right)^2-2\left(\dfrac{du}{dx}\right)^4=-yu$,

7. $x\left(y''\right)^3+\left(y'\right)^4=y$,

8. $\dfrac{dy}{dx}+xy=y^2+1$,

9. $L\dfrac{di}{dt}+Ri-E=0$,

10. $\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$,

11. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\varphi(x)=0$,

12. $yy''-x=0$.

1.4 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΑΥΘΑΙΡΕΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Οι διαφορικές εξισώσεις, όπως είπαμε και παραπάνω, έχουν σωρεία εφαρμογών και εμφανίζονται σε πάρα πολλά πρακτικά προβλήματα και με διάφορους τρόπους. Ένας χρήσιμος τρόπος με τον οποίο παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση και από τον οποίο βλέπουμε τι είδους λύσεων μπορεί να έχει η συγκεκριμένη εξίσωση, είναι η *απαλοιφή αυθαίρετων σταθερών* από μια δοθείσα σχέση. Ας ξεκινήσουμε με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 1^o: Να γίνει απαλοιφή των σταθερών c_1 και c_2 από την εξίσωση:

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}. \tag{1}$$

Λύση: Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση δυο φορές, αφού τόσες είναι και οι σταθερές που περιέχει και παίρνουμε:

$$y'=3c_1e^{3x}-2c_2e^{-2x}, \tag{2}$$

$$y''=9c_1e^{3x}+4c_2e^{-2x}. \tag{3}$$

Προσθέτουμε (x2) τη σχέση (2) στη σχέση (3) και έχουμε:

$$y''+2y'=9c_1e^{3x}+4c_2e^{-2x}+6c_1e^{3x}-4c_2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y''+2y'=15c_1e^{3x}.$$

Προσθέτουμε (x2) τη σχέση (1) στη σχέση (2) και έχουμε:

$$y'+2y=3c_1e^{3x}-2c_2e^{-2x}+2c_1e^{3x}+2c_2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y' + 2y = 5c_1 e^{3x}.$$

Συνεπώς

$$y'' + 2y' = 3(y' + 2y)$$

ή

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Θα μπορούσαμε, επίσης, να καταλήξουμε στην πιο πάνω Δ.Ε. με τη χρήση της γραμμικής άλγεβρας, αφού όπως γνωρίζουμε, οι εξισώσεις (1), (2) και (3) με τις c_1 και c_2 ως άγνωστες ποσότητες, έχουν λύσεις μόνον όταν η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} y & -e^{3x} & -e^{-2x} \\ y' & -3e^{-2x} & 2e^{-2x} \\ y'' & -9e^{3x} & -4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0.$$

Όμως τα e^{3x} και e^{-2x} είναι πάντοτε διάφορα του μηδενός και έτσι η παραπάνω ορίζουσα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{vmatrix} y & -1 & -1 \\ y' & -3 & 2 \\ y'' & -9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y(12+18) - y'(4-9) + y''(-2-3) = 0$$

άρα

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Γενικεύοντας την παραπάνω μέθοδο, για την απαλοιφή των σταθερών $c_1, c_2, \ldots, c_n$ από εξισώσεις της μορφής:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \cdots + c_n e^{k_n x} \,,$$

θα παίρνουμε πάντα μια γραμμική Δ.Ε. της μορφής:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \,,$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n$ είναι σταθερές. Τέτοιες Δ.Ε. θα δούμε διεξοδικότερα σε άλλο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2$^{\text{ο}}$: Να γίνει απαλοιφή της σταθεράς C από την εξίσωση:

$$(t-C)^2 + u^2 = C^2 \,.$$

Λύση: Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς t και παίρνουμε:

$$2(t-C) + 2u\frac{du}{dt} = 0 \,,$$

ή

$$u\frac{du}{dt} + t = C \,.$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$\left(-u\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2 - \left(u\frac{du}{dt} + t\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - t^2 - 2tu\frac{du}{dt} = 0$$

ή

$$\left(u^2 - t^2\right)dt - 2tudu = 0 \,.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσαμε να εργαστούμε και ως εξής:

Από την εξίσωση

$$(t-C)^2 + u^2 = C^2$$

έχουμε

$$t^2 - 2Ct + u^2 = 0$$

ή

$$\frac{t^2 + u^2}{t} = 2C\,.$$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη παίρνουμε

$$\frac{\left(2t + 2u\dfrac{du}{dt}\right)t - t^2 - u^2}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 + 2tu\frac{du}{dt} - t^2 - u^2 = 0$$

ή

$$\left(t^2 - u^2\right)dt + 2tudu = 0$$

ή

$$\left(u^2 - t^2\right)dt - 2tudu = 0\,.$$

<u>**Παράδειγμα 3ο**</u>**:** Να γίνει απαλοιφή των σταθερών A και β από την εξίσωση:

$$x = A\cos\left(wt + \beta\right). \tag{4}$$

<u>**Λύση**</u>**:** Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς t, δυο φορές, αφού τόσες είναι και οι σταθερές που περιέχει και παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = -wA\sin\left(wt + \beta\right), \tag{5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2A\cos\left(wt + \beta\right). \tag{6}$$

Από τις εξισώσεις (4) και (6) βλέπουμε ότι

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0\,.$$

<u>Παράδειγμα 4^ο</u>: Να γίνει απαλοιφή της σταθεράς c από την εξίσωση:

$$x\sin y=c-x^2y\,.$$

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς x και παίρνουμε:

$$\sin y+\frac{dy}{dx}x\cos y+2xy+\frac{dy}{dx}x^2=0$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\left(x\cos y+x^2\right)+\left(\sin y+2xy\right)=0$$

ή

$$\left(x\cos y+x^2\right)dy+\left(\sin y+2xy\right)dx=0\,.$$

<u>Παράδειγμα 5^ο</u>: Να γίνει απαλοιφή των σταθερών c_1 και c_2 από την εξίσωση:

$$y=c_1e^{2x}\cos 3x+c_2e^{2x}\sin 3x\,. \tag{7}$$

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς x δυο φορές, αφού τόσες είναι και οι σταθερές που περιέχει και παίρνουμε:

$$y'=2c_1e^{2x}\cos 3x-3c_1e^{2x}\sin 3x+2c_2e^{2x}\sin 3x+3c_2e^{2x}\cos 3x\,, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}y''=&\,4c_1e^{2x}\cos 3x-6c_1e^{2x}\sin 3x-6c_1e^{2x}\sin 3x-9c_1e^{2x}\cos 3x+\\&4c_2e^{2x}\sin 3x+6c_2e^{2x}\cos 3x+6c_2e^{2x}\cos 3x-9c_2e^{2x}\sin 3x\end{aligned}$$

ή

$$y''=-5c_1e^{2x}\cos 3x-12c_1e^{2x}\sin 3x-5c_2e^{2x}\sin 3x+12c_2e^{2x}\cos 3x \tag{9}$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) παίρνουμε:

$$y''-4y'+13y=0\,.$$

1.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παρακάτω εξισώσεις να γίνει απαλοιφή των αυθαίρετων σταθερών.

α. $x^2y + x\sin y = a$,

β. $y - c_1x^2 - c_2e^{2x} = 0$,

γ. $y - c_1x - c_2e^x = 0$,

δ. $y^2 + cx^2 + x = 0$,

ε. $y - cx - c^2 = 1$,

στ. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$,

ζ. $y = cx + \dfrac{h}{c}$, η h είναι παράμετρος και δεν απαλοίφεται.

η. $x = c_1\sin wt + c_2\cos wt$, η w είναι παράμετρος και δεν απαλοίφεται.

2. Από τις Δ.Ε. που προκύπτουν στην πιο πάνω άσκηση, ποιες είναι γραμμικές και ποιες μη-γραμμικές;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

2.1 ΔΙΑΧΩΡΙΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Μια Δ.Ε. πρώτης τάξης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

όπου οι $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι συναρτήσεις των δυο μεταβλητών x και y.

Η απλούστερη μορφή τέτοιων εξισώσεων είναι:

$$A(x)dx + B(y)dy = 0,$$

στις οποίες οι δυο μεταβλητές x και y διαχωρίζονται και η λύση προκύπτει από απ' ευθείας ολοκλήρωση.

<u>Θεώρημα</u> (Υπαρξης Λύσεων): Έστω η Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

και ότι R είναι η ορθογώνια περιοχή που ορίζεται από

$$|x - x_0| \le a \quad \text{και} \quad |y - y_0| \le b,$$

με το σημείο $(x_0,\ y_0)$ στο κέντρο αυτής. Αν οι f και f_y είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x και y στην R, τότε υπάρχει διάστημα, $|x - x_0| \le k$, γύρω από το x_0 και μια συνάρτηση $y(x)$, τέτοια ώστε:

(i) Η $y(x)$ είναι μια λύση της Δ.Ε. (1) στο διάστημα $|x - x_0| \le k$.

(ii) Στο διάστημα $|x - x_0| \le k$, η συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί την ανισότητα $|y(x) - y_0| \le b$.

(iii) Στο σημείο $x = x_0$, η $y = y(x_0) = y_0$.

(iv) Η $y(x)$ είναι μοναδική στο διάστημα $|x-x_0|\le k$, δηλαδή είναι η μοναδική συνάρτηση που πληροί τις (i) - (iii) παραπάνω.

Το πιο πάνω θεώρημα λέει, με άλλα λόγια, ότι αν η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει «καλή» συμπεριφορά γύρω από το σημείο $(x_0,\ y_0)$, τότε η Δ.Ε. (1) έχει μοναδική λύση κοντά στο σημείο αυτό.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x},$$

για $x\succ 0$ και $y\succ 0$.

<u>Λύση</u>: Γράφουμε τη δοθείσα εξίσωση, διαχωρίζοντας τις δυο μεταβλητές, ως ακολούθως

$$\frac{dy}{y}=\frac{3dx}{x},$$

οπότε, ολοκληρώνοντας δεξί και αριστερό μέλος παίρνουμε:

$$\ln|y|=3\ln|x|+c.$$

Και αφού πρέπει να ισχύει ότι $x\succ 0,\ \ y\succ 0$, η λύση της Δ.Ε. γράφεται:

$$y=c_1x^3,\ \ \text{όπου}\ c_1=e^c\succ 0.$$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0,$$

με τη *αρχική συνθήκη* ότι, όταν $x=0,\ \ y=-1$.

<u>Λύση</u>: Η δοθείσα εξίσωση είναι πρώτης τάξης, με $M(x,y)=1+y^2$ και $N(x,y)=1+x^2$ που μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης, καθώς και η μερική παράγωγος αυτού ως προς y είναι συνεχείς κοντά στο σημείο $x=0,\ y=-1$, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μοναδική λύση της δοθείσας Δ.Ε.

Με διαχώριση των μεταβλητών της Δ.Ε. παίρνουμε:

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0\,.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε τη λύση:

$$Arc\tan x + Arc\tan y = c\,.$$

Τώρα από την αρχική συνθήκη $x=0,\ y=-1$ έχουμε:

$$Arc\tan 0 + Arc\tan(-1) = c\,,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $c=-\dfrac{\pi}{4}$.

<u>Σημείωση:</u> α) Μια Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, ονομάζεται <u>*Πρόβλημα Αρχικών Τιμών*</u> ή <u>*Πρόβλημα Cauchy*</u>[1].

β) Η λύση μιας Δ.Ε. ονομάζεται <u>*γενική λύση*</u>, ενώ η λύση ενός προβλήματος Cauchy, ονομάζεται <u>*χαρακτηριστική λύση*</u>.

<u>Παράδειγμα 3ο</u>: Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy

$$2x(y+1)dx - ydy = 0\,,\quad x=0,\ \ y=-2\,.$$

<u>Λύση</u>: Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές και παίρνουμε:

$$2xdx=\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy,\quad (y\neq -1)$$

ολοκληρώνουμε την παραπάνω Δ.Ε. και έχουμε:

$$x^2 = y - \ln|y+1| + c\,.$$

[1] Cauchy, Augustin L. (1794 – 1857) Γάλλος μαθηματικός.

Από την αρχική συνθήκη $x=0,\ y=-2$ προσδιορίζουμε την αυθαίρετη σταθερά c, ήτοι

$$0=-2-\ln\left|-2+1\right|+c,$$

απ' όπου

$$2+\ln 1=c$$

ή

$$c=2.$$

Και έτσι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

$$x^2=y-\ln\left|y+1\right|+2.$$

2.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

1. $(1-x)\dfrac{dy}{dx}=y^2$,
2. $xy^3dx+e^{x^2}dy=0$,
3. $\sin x\sin y dx+\cos x\cos y dy=0$,
4. $2y=3xy'$,
5. $ye^{2x}-\left(4+e^{2x}\right)\dfrac{dy}{dx}$,
6. $\dfrac{dV}{dQ}=-\dfrac{V}{Q}$,
7. $x\cos^2 y+\tan y\dfrac{dy}{dx}=0$,
8. $xy^3\dfrac{dx}{dy}=\left(-y-1\right)e^{-x}$,
9. $x^2y=\dfrac{e^y}{y'}$,
10. $\dfrac{dx}{dt}=t\left(1+t^2\right)\sec^2 x$.

Να βρεθεί η χαρακτηριστική λύση των παρακάτω προβλημάτων Cauchy.

1. $\dfrac{dy}{dx}=-4yx,\quad x=0,\ y=y_0$.

2. $xy-\left(1+y^2\right)\dfrac{dx}{dy}=0,\quad x=2,\ y=3$.

3. $y' = xe^{(y-x^2)}, \quad x=0, \; y=0$.

4. $2xy' = \dfrac{1+y^2}{y}, \quad x=2, \; y=3$.

5. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v^3 \sin t}{2\alpha^2 - v}, \quad t=0, \; v=\alpha$.

2.3 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ένα πολυώνυμο, του οποίου όλοι οι όροι είναι ίδιου βαθμού, ονομάζεται *ομογενές πολυώνυμο*. Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα:

$$\begin{aligned} & y^3x + 5x^4, \\ & x^2 - 5yx + 2y^2, \\ & x^5 + y^5, \end{aligned}$$

είναι ομογενή πολυώνυμα, τετάρτου, δευτέρου και πέμπτου βαθμού αντίστοιχα.

Αν υποθέσουμε ότι κάθε μεταβλητή x και y των πολυωνύμων αυτών αντιπροσωπεύει κάποιο φυσικό μέγεθος, όπως π.χ. μήκος, τότε κάθε πολυώνυμο έχει επίσης ένα φυσικό μέγεθος, ήτοι μήκος υψωμένο σε κάποια δύναμη. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι όταν μιας συνάρτησης οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν κάποιο φυσικό μέγεθος, π.χ. μήκος και η συνάρτηση έχει το φυσικό αυτό μέγεθος υψωμένο στη δύναμη k, τότε ονομάζεται *ομογενής συνάρτηση* βαθμού k.

Για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{3y+x} - 2y^3 e^{y/x}$$

είναι ομογενής, $3^{ου}$ βαθμού των μεταβλητών x και y.

Η συνάρτηση:

$$f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$$

είναι ομογενής, μηδενικού βαθμού των μεταβλητών x και y, ενώ η συνάρτηση:

$$f(x,y)=\sqrt{4y+x}$$

είναι ομογενής βαθμού ½.

Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f(x,y)$ ονομάζεται <u>*ομογενής βαθμού*</u> k των μεταβλητών x και y αν και μόνον αν

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y).$$

Ο πιο πάνω ορισμός μπορεί, προφανώς, να γενικευθεί για συναρτήσεις περισσοτέρων των δυο μεταβλητών.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Για τη συνάρτηση

$$f(x,y)=x^4+y^2x^2$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^4+(\lambda y)^2(\lambda x)^2 \\ &= \lambda^4\left(x^4+y^2x^2\right) \\ &= \lambda^4 f(x,y). \end{aligned}$$

Οπότε είναι ομογενής τετάρτου βαθμού.

β) Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\cos y\sin x+x^2$$

δεν είναι ομογενής, αφού

$$f(\lambda x,\lambda y)=\cos(\lambda y)\sin(\lambda x)+(\lambda x)^2$$

$$\neq \lambda^2 f(x,y).$$

Για ομογενείς συναρτήσεις ισχύουν τα εξής.

<u>Θεώρημα 1^ο^</u> : Αν οι συναρτήσεις $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς, ίδιου βαθμού, τότε η συνάρτηση $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ είναι ομογενής, μηδενικού βαθμού.

<u>Θεώρημα 2^ο^</u> : Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής, μηδενικού βαθμού, τότε είναι συνάρτηση μόνον της μεταβλητής $\dfrac{y}{x}$.

2.4 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

<u>Ορισμός</u>: Η Δ.Ε.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

ονομάζεται *<u>ομογενής</u>* αν και μόνον αν οι συναρτήσεις $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς, ίδιου βαθμού των δυο μεταβλητών x και y.

Ο μετασχηματισμός $y=vx$ δίνει $dy=vdx+xdv$ και ανάγει κάθε ομογενή Δ.Ε. στη μορφή:

$$P(x,v)dx+Q(x,v)dy=0,$$

στην οποία μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές και μετά την ολοκλήρωση η μεταβλητή v αντικαθίσταται από την y/x.

<u>Παράδειγμα 1^ο^</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(xy-x^2-y^2\right)dx+xydy=0.$$

<u>Λύση</u>: Έχουμε $M(x,y)=xy-x^2-y^2$ και $N(x,y)=xy$ που είναι και οι δυο ομογενείς συναρτήσεις δευτέρου βαθμού. Οπότε θέτουμε $y=vx$ και η δοθείσα Δ.Ε. γίνεται:

$$\left(x^2v-x^2-x^2v^2\right)dx+x^2v(vdx+xdv)=0.$$

Βγάζοντας το x^2 κοινό παράγοντα και διαιρώντας παίρνουμε:

$$\left(v-1-v^2\right)dx+v\left(vdx+xdv\right)=0$$

ή

$$(v-1)dx+xvdv=0\,.$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές και έχουμε:

$$\frac{dx}{x}+\frac{vdv}{v-1}=0$$

ή

$$\frac{dx}{x}+\left(1+\frac{1}{v-1}\right)dv=0\,.$$

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε τη γενική λύση αυτής της Δ.Ε.

$$\ln|x|+v+\ln|v-1|=\ln|c|$$

ή

$$x(v-1)e^{v}=c\,.$$

Επανερχόμενοι στις αρχικές μεταβλητές x και y, έχουμε:

$$\left(y-x\right)e^{y/x}=c\,.$$

<u>**Παράδειγμα 2ο**</u>**:** Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(x^2+y^2\right)dy+xydx=0\,.$$

<u>**Λύση**</u>**:** Έχουμε $M\left(x,y\right)=xy$ και $N\left(x,y\right)=x^2+y^2$ που είναι και οι δυο ομογενείς συναρτήσεις δευτέρου βαθμού.

Θέτουμε $x=vy \;\Rightarrow\; dx=vdy+ydv$ και η δοθείσα Δ.Ε. γίνεται:

$$\left(v^2y^2+y^2\right)dy+vy^2\left(vdy+ydv\right)=0\,,$$

ή

$$\left(v^2+1\right)dy+v\left(vdy+ydv\right)=0 .$$

Έτσι πρέπει να λύσουμε τη Δ.Ε.

$$\left(2v^2+1\right)dy+vydv=0 ,$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$\frac{dy}{y}+\frac{vdv}{2v^2+1}=0 ,$$

της οποίας η γενική λύση είναι:

$$4\ln|y|+\ln\left(2v^2+1\right)=\ln|c| ,$$

ή

$$y^4\left(2v^2+1\right)=c .$$

Επανερχόμενοι στις αρχικές μεταβλητές x και y, έχουμε:

$$y^4\left(\frac{2x^2}{y^2}+1\right)=c ,$$

ή

$$y^2\left(2x^2+y^2\right)=c .$$

2.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να επιλυθούν οι παρακάτω Δ.Ε.

1. $y^2dx+x\left(x+y\right)dy=0$,
2. $\left(x-2y\right)dx+\left(2x+y\right)dy=0$,
3. $xydx-\left(x+2y\right)^2dy=0$,
4. $\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$,
5. $xydx-\left(x^2+3y^2\right)dy=0$,
6. $(5v-u)du+(3v-7u)dv=0$.

2.6 ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως προαναφέραμε, όταν μια Δ.Ε. Μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$A(x)dx + B(y)dy = 0,$$

τότε αυτή μπορεί να επιλυθεί με ολοκλήρωση, ήτοι βρίσκοντας μια συνάρτηση, της οποίας το διαφορικό είναι το $A(x)dx + B(y)dy$.

Η ίδια μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και σε ορισμένες Δ.Ε. της μορφής

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

στις οποίες η διαχώριση των μεταβλητών δεν είναι εφικτή. Έστω ότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $F(x,y)$, για την οποία

$$dF = Mdx + Ndy, \tag{2}$$

τότε η συνάρτηση

$$F(x,y) = c \tag{3}$$

ορίζει ένα σύνολο λύσεων της Δ.Ε. (1), αφού από την (3) έχουμε ότι

$$dF(x,y) = 0,$$

ή, λόγω της (2)

$$Mdx + Ndy = 0.$$

<u>Ορισμός</u>: Αν υπάρχει μια συνάρτηση F, της οποίας το διαφορικό είναι το

$$Mdx + Ndy = 0,$$

τότε η (1) ονομάζεται <u>*ακριβής*</u> Δ.Ε..

Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια Δ.Ε. ακριβής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ είναι όλες συνεχείς συναρτήσεις των x και y, τότε αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η Δ.Ε.

$$Mdx + Ndy = 0$$

ακριβής, είναι η ισότητα:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

η δε λύση αυτής δίνεται από τη συνάρτηση $F(x, y) = c$, όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(x^3 + 2y\right)\frac{dy}{dx} = 3x\left(2 - xy\right). \tag{4}$$

<u>Λύση</u>: Γράφουμε τη δοθείσα Δ.Ε. (4) στη μορφή (1) και έχουμε:

$$3x\left(xy - 2\right)dx + \left(x^3 + 2y\right)dy = 0. \tag{5}$$

Οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

και κατά συνέπεια η Δ.Ε. (5) είναι ακριβής.

Η λύση της Δ.Ε. δίνεται από την $F(x, y) = c$, όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x^2 y - 6x \tag{6}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 + 2y. \tag{7}$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση F, αρκεί να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (6) ως προς x, θεωρώντας τη y σταθερά, ή, να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (7) ως προς y, θεωρώντας τη x σταθερά. Πρέπει όμως να προσέξουμε τη αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης, στην πρώτη περίπτωση να είναι μια συνάρτηση της y, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μια συνάρτηση της x.

Έτσι, από την (6) έχουμε:

$$F = x^3 y - 3x^2 + g(y). \tag{8}$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση $g(y)$, κάνουμε χρήση της εξίσωσης (7), αφού η (8) πρέπει να ικανοποιεί και την (7) επίσης. Άρα παίρνουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 + 2y = x^3 + g'(y)$$

ή

$$2y = g'(y)$$

και

$$g(y) = y^2,$$

δηλαδή

$$F = x^3 y - 3x^2 + y^2$$

Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. (4) δίνεται από την

$$x^3 y - 3x^2 + y^2 = c.$$

Παράδειγμα 2^{o}: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(2x^3 - xy^2 - 2y + 3\right)dx - \left(x^2 y + 2x\right)dy = 0. \qquad (9).$$

Λύση: Εδώ

$$M = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3, \quad N = -\left(x^2 y + 2x\right)$$

και έτσι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy - 2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Οπότε η λύση της Δ.Ε. (9) δίνεται από τη συνάρτηση $F(x,y) = c$, όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 \tag{10}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 y - 2x. \tag{11}$$

Ολοκληρώνοντας την (11) ως προς y παίρνουμε:

$$F = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + q(x),$$

όπου η συνάρτηση $q(x)$ προκύπτει από την εξίσωση (10), αφού

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 = -xy^2 - 2y + q'(x)$$

και έτσι

$$q'(x) = 2x^3 + 3,$$

δηλαδή

$$q(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x.$$

Συνεπώς η λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι:

$$-\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4 + 3x = c_1$$

ή

$$x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c.$$

2.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να εξεταστούν οι παρακάτω Δ.Ε. αν είναι ακριβείς και να επιλυθούν.

1. $(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$, 2. $(2xy-3x^2)dx+(x^2+2y)dy=0$,

3. $(1+y^2)dx+(x^2y+y)dy=0$, 4. $(2xy-y)dx+(x^2+x)dy=0$,

5. $\left[2xy\cos(x^2)-2xy+1\right]dx+\left[\sin(x^2)-x^2\right]dy=0$,

6. $(w^3+wz^2-z)dw+(z^3+w^2z-z)dz=0$,

7. $(\sin\theta-2r\cos\theta)dr+r\cos\theta(2r\sin\theta+1)d\theta=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

3.1 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Αν μια Δ.Ε. πρώτης τάξης δεν είναι ακριβής, τον τρόπο επίλυσης της οποίας μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τότε προσπαθούμε να την κάνουμε ακριβή με την εισαγωγή ενός κατάλληλου παράγοντα που ονομάζεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* ή *πολλαπλασιαστής του Euler*[2].

Η γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης, όπως είδαμε στο 1ο κεφάλαιο έχει τη γενική μορφή:

$$a(x)\frac{dy}{dx}+\beta(x)y=\gamma(x). \tag{1}$$

Διαιρώντας και τα δυο μέλη της (1) δια $a(x)$ παίρνουμε την στάνταρ μορφή της γραμμικής Δ.Ε. εξίσωσης, που είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x). \tag{2}$$

Έστω τώρα ότι για την εξίσωση (2) υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής του Euler, $v(x)\succ 0$, ο οποίος είναι συνάρτηση της μεταβλητής x. Τότε από την εξίσωση (2), πολλαπλασιάζοντας επί $v(x)$, παίρνουμε την

$$v(x)\left[\frac{dy}{dx}+p(x)y\right]=v(x)\cdot q(x). \tag{3}$$

Η Δ.Ε. (3) είναι ακριβής, η οποία στη γνωστή μορφή της γράφεται:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

όπου

$$M(x,y)=v(x)p(x)y-v(x)\cdot q(x)$$

και

[2] Euler, Leonhard (1707 – 1783) Ελβετός μαθηματικός.

$$N(x,y)=v(x),$$

στις οποίες οι v,p και q είναι συναρτήσεις μόνο μιας μεταβλητής, της x.

Αφού λοιπόν η Δ.Ε. (3) είναι ακριβής, ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial\left[v(x)p(x)y-v(x)\cdot q(x)\right]}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

ή

$$v(x)p(x)=\frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

Τώρα στη Δ.Ε. (4) μπορούμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές και να πάρουμε:

$$p(x)dx=\frac{dv}{v},$$

απ΄ όπου έχουμε ότι

$$\ln v=\int p(x)dx$$

ή

$$v=e^{\int p(x)dx}. \tag{5}$$

Συνεπώς ένας θετικός πολλαπλασιαστής του Euler, που καθιστά τη Δ.Ε. (2) ακριβή, δίνεται από την (5).

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στα εξής τέσσερα βήματα που πρέπει να ακολουθούμε για την επίλυση γραμμικών Δ.Ε. πρώτης τάξης:

1. Θέτουμε τη δοθείσα Δ.Ε. στη στάνταρ μορφή της, ήτοι στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

2. Βρίσκουμε τον πολλαπλασιαστή του Euler: $e^{\int p(x)dx}$.

3. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της γραμμικής εξίσωσης επί τον πολλαπλασιαστή του Euler.

4. Λύνουμε την ακριβή Δ.Ε. που προκύπτει.

<u>Παράδειγμα 1^{o}</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$2\left(4x^2 - y\right)dx = xdy .$$

<u>Λύση</u>: Η δοθείσα εξίσωση είναι γραμμική της εξαρτημένης μεταβλητής y και στη στάνταρ μορφή της γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 8x \text{, όπου } x \neq 0. \tag{6}$$

Ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο εξής:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2dx}{x}} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2 .$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της Δ.Ε. (6) επί x^2 και έχουμε:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 8x^3 \tag{7}$$

ή

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 y\right) = 8x^3 . \tag{8}$$

Η εξίσωση (8) λύνεται με ολοκλήρωση των δυο μελών της, ήτοι

$$x^2 y = 2x^4 + c . \tag{9}$$

<u>Άσκηση</u>: α) Να δειχθεί ότι η (9) παραπάνω αποτελεί όντως ένα σύνολο λύσεων της Δ.Ε. (6). β) Να λυθεί η Δ.Ε. (7) όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις ακριβείς Δ.Ε.

<u>Παράδειγμα 2°</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(xy-3x-2\right)dy = ydx\,.$$

<u>Λύση</u>: Η δοθείσα εξίσωση είναι γραμμική στη μεταβλητή x και όχι στην y, αφού προκύπτει το γινόμενο ydy. Για να τη φέρουμε στη στάνταρ μορφή της γράφουμε:

$$ydx+\left(3-y\right)xdy = -2dy\,,$$

απ΄ όπου έχουμε:

$$\frac{dx}{dy}+\left(\frac{3}{y}-1\right)x = \frac{-2}{y}\,,\ \text{όπου}\ \ y \neq 0\,. \tag{10}$$

Ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο εξής:

$$e^{\int p(y)dy} = e^{\int\left(\frac{y}{y}-1\right)dx} = e^{\left(3\ln|y|-y\right)} = e^{3\ln|y|}\cdot e^{-y} = e^{\ln|y|^3}\cdot e^{-y} = |y|^3\cdot e^{-y}\,.$$

Τώρα, για $y \succ 0$, ο πολλαπλασιαστής του Euler για τη γραμμική Δ.Ε. (10) είναι ο y^3e^{-y}, ενώ για $y \prec 0$, ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο $-y^3e^{-y}$.

Η ακριβής εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή του πιο πάνω πολλαπλασιαστή του Euler είναι η ακόλουθη:

$$y^3e^{-y}dx+y^2\left(3-y\right)e^{-y}xdy = -2y^2e^{-y}dy$$

ή

$$y^3e^{-y}dx+\left(3xy^2e^{-y}-xy^3e^{-y}+2y^2e^{-y}\right)dy = 0\,. \tag{11}$$

Από την ακριβή Δ.Ε. (11) έχουμε:

$$M = y^3e^{-y}$$

και

$$N = 3xy^2e^{-y}-xy^3e^{-y}+2y^2e^{-y}\,,$$

οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2e^{-y}-y^3e^{-y}\,.$$

Η λύση της (11) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$F\left(x,y\right)=c\,,$$

όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=y^3e^{-y} \tag{12}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N=3xy^2e^{-y}-xy^3e^{-y}+2y^2e^{-y}\,. \tag{13}$$

Τώρα από την εξίσωση (12) έχουμε:

$$F=xy^3e^{-y}+g(y) \tag{14}$$

και παίρνοντας τη μερική παράγωγο της (14) ως προς y έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3xy^2e^{-y}-xy^3e^{-y}+g'(y)$$

και λόγω της (13) παίρνουμε:

$$g'(y)=2y^2e^{-y}\,.$$

Συνεπώς

$$g(y)=\int 2y^2e^{-y}dy$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$g(y)=-2y^2e^{-y}-4ye^{-y}-4e^{-y}\,.$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$xy^3e^{-y}-2y^2e^{-y}-4ye^{-y}-4e^{-y}=c$$

ή

$$xy^3 = 2y^2 + 4y + 4 + ce^y .$$

3.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε.

1. $\left(x^4 + 2y\right)\dfrac{dx}{dy} = x$,
2. $\left(3xy + 3y - 4\right)dx + (1+x)^2\, dy = 0$,
3. $t\dfrac{dv}{dt} = 6te^{2t} + v\left(2t-1\right)$,
4. $\dfrac{dy}{dx} = x - 3y$,
5. $\left(y-2\right)dx + \left(3x - y\right)dy = 0$,
6. $\dfrac{du}{dt} = t - 2tu$,
7. $\left(y - \cos^2 x\right)dx + \cos x dy = 0$,
8. $y' + 2y\cot 2x = x$.

3.3 ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΗ ΤΟΥ EULER

Σε ορισμένες περιπτώσεις συγκεκριμένων μορφών Δ.Ε. υπάρχουν τρόποι εύρεσης του πολλαπλασιαστή του Euler. Θα δούμε παρακάτω μερικές από αυτές της μορφές.

Για Δ.Ε. της γενικής μορφής:

$$M\left(x,y\right)dx + N\left(x,y\right)dy = 0 , \tag{1}$$

ο πολλαπλασιαστής του Euler που τις καθιστά ακριβείς, βρίσκεται ως εξής:

α) Αν $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = f\left(x\right)$, είναι συνάρτηση μόνο της x, τότε ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο $e^{\int f(x)dx}$.

β) Αν $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) = g\left(y\right)$, είναι συνάρτηση μόνο της y, τότε ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο $e^{-\int g(y)dy}$.

Σε περίπτωση όμως που καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις δεν ισχύει, τότε το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι η δοθείσα Δ.Ε. δεν έχει πολλαπλασιαστή του Euler, ο οποίος είναι συνάρτηση μόνο της x ή της y.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(4xy+3y^2-x\right)dx+x\left(x+2y\right)dy=0. \tag{2}$$

<u>Λύση</u>: Έχουμε ότι $M=4xy+3y^2-x$ και $N=x^2+2xy$,

οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4x+6y-2x-2y=2\left(x+2y\right).$$

Έτσι

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{x\left(x+2y\right)}2\left(x+2y\right)=\frac{2}{x}.$$

Άρα ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο

$$e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=e^{\ln x^2}=x^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τη Δ.Ε. (2) επί τον πολλαπλασιαστή του Euler παίρνουμε:

$$\left(4x^3y+3x^2y^2-x^3\right)dx+\left(x^4+2x^3y\right)dy=0, \tag{3}$$

η οποία πρέπει να είναι μια ακριβής Δ.Ε. με

$$M=4x^3y+3x^2y^2-x^3$$

και

$$N=x^4+2x^3y.$$

Συνεπώς η λύση της (3) είναι η $F\left(x,y\right)=c$, όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 4x^3y + 3x^2y^2 - x^3 \tag{4}$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^4 + 2x^3y\,. \tag{5}$$

Από την (4) έχουμε:

$$F = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + q(y)\,. \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) έχουμε:

$$x^4 + 2x^3y + q'(y) = x^4 + 2x^3y$$

$$\Rightarrow q'(y) = 0 \Rightarrow q(y) = c_1\,.$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των λύσεων της Δ.Ε. (2) είναι:

$$x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = -c_1$$

ή

$$x^3\left(4y + 4y^2 - x\right) = C\,.$$

Παράδειγμα 2ο: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y\left(x + y + 1\right)dx + x\left(x + 3y + 2\right)dy = 0\,. \tag{7}$$

Λύση: Έχουμε ότι

$$M = xy + y^2 + y \quad \text{και} \quad N = x^2 + 3xy + 2x\,,$$

οπότε

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x + 2y + 1 - 2x - 3y - 2 = -x - y - 1$$

και

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{x+y+1}{x^2+3xy+2x},$$

που δεν είναι συνάρτηση μόνον της x.

Όμως, η συνάρτηση

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{x+y+1}{y(x+y+1)}=-\frac{1}{y}$$

είναι συνάρτηση μόνον της y και έτσι ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο $e^{\int \frac{1}{y}dy}=|y|$.

Συνεπώς, για $y \succ 0$, ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο y, ενώ για $y \prec 0$, ο πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο $-y$.

Και στις δυο περιπτώσεις, όμως, η Δ.Ε. (7) πολλαπλασιαζόμενη επί y ή $-y$, γίνεται:

$$\left(xy^2+y^3+y^2\right)dx+\left(x^2y+3xy^2+2xy\right)dy=0. \qquad (8)$$

Η Δ.Ε. (8) είναι ακριβής και η λύση της δίνεται από την συνάρτηση $F(x,y)=c$, όπου

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M=xy^2+y^3+y^2 \qquad (9)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N=x^2y+3xy^2+2xy. \qquad (10)$$

Από την (9) έχουμε:

$$F=\frac{x^2y^2}{2}+xy^3+xy^2+q(y). \qquad (11)$$

Από τις (10) και (11) έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y + 3xy^2 + 2xy + q'(y) = x^2 y + 3xy^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow q'(y) = 0 \Rightarrow q(y) = c_1 .$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των λύσεων της Δ.Ε. (2) είναι:

$$\frac{x^2 y^2}{2} + xy^3 + xy^2 = -c_1$$

ή

$$xy^2 (x + 2y + 2) = C .$$

3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε.

1. $(x^2 + y^2 + 1)dx + x(x - 2y)dy = 0$,
2. $y(x + y)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$,
3. $2y(x^2 - y + x)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$,
4. $(2xy - y^2 + y)dx + (3x^2 - 4xy + 3x)dy = 0$,
5. $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)dx + (x^2 + 2xy - x)dy = 0$.

3.10 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η γραμμική Δ.Ε. τάξης n, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στη γενική της μορφή γράφεται:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=r(x). \qquad (1)$$

Οι $a_i(x),\ i=0,1,\ldots,n$ και $r(x)$ είναι συναρτήσεις μόνον της x και ανεξάρτητες από την y. Στην περίπτωση που $r(x)=0$, η Δ.Ε. (1) ονομάζεται *γραμμική ομογενής*[3], ενώ σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *γραμμική μη-ομογενής*.

Αν οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \qquad (2)$$

τότε η συνάρτηση

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

όπου $c_1,\ c_2$ είναι σταθερές, είναι επίσης λύση της εξίσωσης (2).

Γενικότερα, ισχύει ότι:

Αν $y_1(x),\ i=1,2,\ldots k$ είναι λύσεις της εξίσωσης (2) και αν $c_i,\ i=1,2,\ldots k$ είναι σταθερές, τότε ο γραμμικός συνδυασμός:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_1(x)+\cdots+c_ky_k(x), \qquad (3)$$

είναι επίσης λύση της ομογενούς Δ.Ε. (2).

3.6 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ και οι σταθερές $c_1,c_2,\ldots,c_n$, τουλάχιστον μια εκ των οποίων είναι διάφορη του μηδενός, τέτοιες ώστε

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0 \qquad (4)$$

[3] Ο όρος *ομογενής* εδώ δεν έχει καμία σχέση με αυτόν που είδαμε στο 2^o κεφάλαιο.

σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ λέμε ότι είναι *γραμμικά εξαρτημένες*. Σε αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*, ήτοι οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν από την εξίσωση (4) έχουμε ότι

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Είναι προφανές ότι αν οι συναρτήσεις ενός συνόλου είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε τουλάχιστον μια εξ αυτών είναι ο γραμμικός συνδυασμός των άλλων, ενώ αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε καμία δεν μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Δίνουμε στη συνέχεια ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης ενός προβλήματος Cauchy για τη γραμμική Δ.Ε. τάξης n.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ και $r(x)$ είναι συνεχείς σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\ \beta)$, έστω ακόμη ότι $x_0 \in (\alpha,\ \beta)$ ένας πραγματικός αριθμός και $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $y = y(x)$, η οποία ορίζεται στο $(\alpha,\ \beta)$, είναι λύση της Δ.Ε.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x) \tag{5}$$

στο διάστημα αυτό και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy

$$y'' + y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1. \tag{6}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι τόσο το $\sin x$, όσο και το $\cos x$, είναι λύσεις της δοθείσας Δ.Ε. και κατά συνέπεια, για σταθερές c_1 και c_2 η

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

είναι επίσης λύση της Δ.Ε.

Τώρα από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0=c_1\sin 0+c_2\cos 0 \\ 1=c_1\cos 0-c_2\sin 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1=1,\ c_2=0\,.$$

Άρα η μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy (6) είναι η

$$y(x)=\sin x\,.$$

Η γραμμική ανεξαρτησία ενός συνόλου συναρτήσεων εξασφαλίζεται από το ακόλουθο.

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x),\dots, f_n(x)$ είναι διαφορίσιμες τουλάχιστον $n-1$ σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\ \beta]$, τότε αν

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7)$$

οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Η παραπάνω ορίζουσα (7) ονομάζεται *ορίζουσα Wronski*[4] των συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x),\dots, f_n(x)$.

3.7 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα δίνει στην ουσία τον ορισμό της γενικής λύσης μιας γραμμικής, ομογενούς Δ.Ε.

Θεώρημα: Έστω ότι $\{y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της Δ.Ε.

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0\,, \qquad (1)$$

[4] Wronski, Josef M. (1778 – 1853) Γαλλοπολωνός μαθηματικός.

στο διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ και ότι οι $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα αυτό με $a_0(x) \neq 0$. Αν $y(x)$ είναι οποιαδήποτε λύση της (1) στο $(\alpha,\ \beta)$, τότε υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, ..., c_n$, τέτοιες ώστε

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) + \cdots + c_k y_k(x). \tag{2}$$

Η συνάρτηση (2) ονομάζεται *γενική λύση* της γραμμικής ομογενούς Δ.Ε. (1).

Για τη μη- ομογενή Δ.Ε.

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = r(x), \tag{3}$$

έχουμε το εξής.

Έστω ότι $y_p(x)$ είναι μια οποιαδήποτε ειδική λύση της Δ.Ε (3), με την έννοια ότι δεν περιέχει κατ' ανάγκη κάποια αυθαίρετη σταθερά και έστω ακόμη ότι $y_c(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. (1), τότε η

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{4}$$

είναι η γενική λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε. (3).

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' = 4. \tag{5}$$

<u>Λύση</u>: Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις 1 και x είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. $y'' = 0$ και έτσι

$$y_c(x) = c_1 + c_2 x.$$

Ακόμη, η συνάρτηση $y_p(x) = 2x^2$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. (5), αφού $y_p'(x) = 4x$ και $y_p''(x) = 4$. Κατά συνέπεια η γενική λύση της (5) δίνεται από την

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + 2x^2.$$

3.8 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Αν συμβολίσουμε με D την παραγώγιση (της y) ως προς x, με D^2 την παραγώγιση (της y) ως προς x δυο φορές κ.ο.κ., τότε για θετικό ακέραιο αριθμό k έχουμε ότι

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Μια έκφραση της μορφής:

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \tag{1}$$

ονομάζεται *διαφορικός τελεστής* τάξης n.

Γενικά, ένας διαφορικός τελεστής ορίζεται ως εξής.

Αν y είναι μια διαφορίσιμη n φορές συνάρτηση, τότε αν εφαρμόσουμε τον A της σχέσης (1) στην συνάρτηση αυτή έχουμε:

$$Ay = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y. \tag{2}$$

Οι συντελεστές a_i, $i = 0,1,\ldots,n$ θα μπορούσαν να είναι συναρτήσεις της x, αλλά στις δικές μας εφαρμογές θα είναι σταθερές ποσότητες.

Δυο διαφορικοί τελεστές A και B είναι ίσοι, δηλαδή $A = B$ αν και μόνον αν $Ay = By$. Ακόμη, το γινόμενο AB ορίζεται πάντοτε και είναι επίσης ένας διαφορικός τελεστής, όπου $ABy = A(By)$, δηλαδή στη συνάρτηση y εφαρμόζουμε τον τελεστή B και στη συνέχεια τον A.

Αν A, B και C είναι διαφορικοί τελεστές, τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης).

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης).

(iii) $(AB)C = A(BC)$ (προσεταιριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού).

(iv) $A(B+C)=AB+AC$ (επιμεριστική ιδιότητα).

(v) Αν A και B είναι διαφορικοί τελεστές με σταθερούς συντελεστές a_i, $i=0,1,\ldots,n$, τότε $AB=BA$ (αντιμεταθετική ιδιότητα πολλαπλασιασμού). Για θετικούς ακέραιους μ και ν ισχύει $D^{\mu}D^{\nu}=D^{\mu+\nu}$.

(vi) Για σταθερά m και θετικό ακέραιο k έχουμε ότι

$$D^k e^{mx}=m^k e^{mx}. \tag{3}$$

Γενικά αν $f(D)$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής

$$f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n, \tag{4}$$

τότε

$$f(D)e^{mx}=a_0m^ne^{mx}+a_1m^{n-1}e^{mx}+\cdots+a_{n-1}me^{mx}+a_ne^{mx}$$

και έτσι

$$f(D)e^{mx}=e^{mx}f(m), \tag{5}$$

δηλαδή αν m είναι λύση της εξίσωσης $f(m)=0$, τότε $f(D)e^{mx}=0$.

(vii) Για τον τελεστή $D-a$ αν εφαρμοστεί στο γινόμενο $e^{ax}y$ έχουμε:

$$(D-a)\left(e^{ax}y\right)=D\left(e^{ax}y\right)-ae^{ax}y$$

$$\Rightarrow\ (D-a)\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}Dy.$$

Επίσης $(D-a)^2\left(e^{ax}y\right)=(D-a)\left(e^{ax}Dy\right)$

ή

$$(D-a)^2\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}D^2y.$$

Συνεχίζοντας, παίρνουμε ότι

$$(D-a)^n\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}D^ny. \tag{6}$$

Τέλος, λόγω της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή ισχύει ότι

$$f(D-a)\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}f(D)y. \tag{7}$$

Η σχέση (7) μας διευκολύνει στο να μεταθέτουμε εκθετικούς παράγοντες $\left(e^{ax}\right)$ από τα αριστερά ενός διαφορικού τελεστή στα δεξιά του, πράγμα που μας βοηθάει στην επίλυση πολλών Δ.Ε., όπως θα δούμε διεξοδικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Αν $A=D+2$ και $B=3D-1$ να υπολογιστούν τα Ay, By και AB.

<u>Λύση</u>: $$Ay=(D+2)y=\frac{dy}{dx}+2y.$$

$$By=(3D-1)y=3\frac{dy}{dx}-y.$$

$$ABy=A\left(By\right)=(D+2)\left(3\frac{dy}{dx}-y\right)$$

$$=3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+6\frac{dy}{dx}-2y$$

$$=3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-2y$$

$$=\left(3D^2+5D-2\right)y,$$

ή αλλιώς,

$$AB=(D+2)(3D-1)=3D^2-D+6D-2=3D^2+5D-2.$$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να υπολογιστούν τα $(D-x)(D+x)$ και $D(xD-1)$.

<u>Λύση</u>: $(D-x)\big((D+x)y\big)=(D-x)\left(\frac{dy}{dx}+xy\right)$

$$=D\left(\frac{dy}{dx}\right)+D(xy)-x\frac{dy}{dx}-x^2y$$

$$=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dx}{dx}y+x\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}-x^2y$$

$$=\frac{d^2y}{dx^2}+y-x^2y$$

$$=\left(D^2+1-x^2\right)y\,.$$

Άρα

$$(D-x)(D+x)=D^2+1-x^2\,.$$

Για τον τελεστή $D(xD-1)$ έχουμε:

$$D(xD-1)y=D\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)$$

$$=\frac{dx}{dx}\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,.$$

Άρα

$$D(xD-1)=\left(D+xD^2-D\right)y=\left(xD^2\right)y\,.$$

<u>Παράδειγμα 3^ο</u>: Αν $f(D)=2D^2+5D-12$, να δειχθεί ότι οι e^{-4x} και $e^{3x/2}$ είναι λύσεις της Δ.Ε.

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-12y=0\,.$$

<u>Λύση</u>: Η εξίσωση $f(m)=0$ είναι η

$$2m^2+5m-12=0$$

ή

$$(m+4)(2m-3)=0\,,$$

της οποίας οι ρίζες είναι $m_1 = -4$ και $m_2 = \frac{3}{2}$.

Τώρα, λόγω της (5) πιο πάνω έχουμε:

$$\left(2D^2 + 5D - 12\right)e^{-4x} = e^{-4x} f(-4) = 0$$

και

$$\left(2D^2 + 5D - 12\right)e^{3x/2} = e^{3x/2} f\left(3/2\right) = 0 .$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις $y_1 = e^{-4x}$ και $y_2 = e^{3x/2}$ είναι λύσεις της

$$\left(2D^2 + 5D - 12\right)y = 0 .$$

Παράδειγμα 4$^{\text{ο}}$: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $(D+3)^4\, y = 0$.

Λύση: Πολλαπλασιάζουμε τη δοθείσα Δ.Ε. επί e^{3x} και έχουμε:

$$e^{3x}(D+3)^4\, y = 0 .$$

Λόγω της σχέσης (6) παίρνουμε:

$$e^{3x}(D+3)^4\, y = (D+3-3)^4\left(e^{3x}y\right) = 0$$

ή

$$D^4\left(e^{3x}y\right) = 0 .$$

Ολοκληρώνοντας τέσσερις φορές την παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$e^{3x}y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

ή

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3\right)e^{-3x} .$$

3.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

α) $(D+x)(D-x)$, β) $(xD-1)D$, γ) $(xD-1)(xD+2)$.

2. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:

α) $(4D+1)(D-2)$, β) $(2D-3)(2D+3)$, γ) $(D-2)(D+1)^2$.

3. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $(D-2)^3 y = 0$.

4. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

α) e^x, e^{2x}, e^{3x}. β) e^x, $\cos x$, $\sin x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ – ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 Η ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΡΙΖΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

Η γραμμική ομογενής Δ.Ε. τάξης n

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0\,, \tag{1}$$

με τη βοήθεια του διαφορικού τελεστή μπορεί να γραφεί απλά ως εξής:

$$f(D)y\,. \tag{2}$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν m είναι λύση της εξίσωσης $f(m)=0$, τότε

$$f(D)e^{mx} = 0\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση $y = e^{mx}$ είναι λύση της Δ.Ε. (2). Η εξίσωση

$$f(m) = 0 \tag{3}$$

ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της (1) ή της (2).

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. (1) είναι βαθμού n και αν

$$m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_n$$

είναι οι πραγματικές ρίζες αυτής, τότε οι n λύσεις της Δ.Ε. (1),

$$y_1 = e^{m_1 x},\ \ y_2 = e^{m_2 x}, \ldots, y_n = e^{m_n x}\,,$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση της Δ.Ε. (1) δίνεται από την

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}\,,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0.$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^3-4m^2+m+6=0,$$

της οποίας μια ρίζα είναι η $m_1=-1$ και έτσι, με σύνθετη διαίρεση παίρνουμε:

$$\left(m^3-4m^2+m+6=0\right)\div(m+1)=(m+1)\left(m^2-5m+6\right),$$

και έτσι

$$m^3-4m^2+m+6=0=(m+1)(m-2)(m-3).$$

Συνεπώς η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}.$$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(3D^3+5D^2-2D\right)y=0.$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$3m^3+5m^2-2m=0$$

ή

$$m(m+2)\left(m-\frac{1}{3}\right)=0.$$

Δηλαδή οι ρίζες είναι $m_1=0,\ m_2=-2$ και $m_3=\frac{1}{3}$.

Άρα η ζητούμενη γενική λύση είναι:

$$y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{x/3}.$$

Παράδειγμα 3ο: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4x=0,$$

με τις συνθήκες ότι όταν $t=0,\ \ x=0$ και $\dfrac{dx}{dt}=3$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^2-4=0,$$

της οποίας οι ρίζες είναι $m_1=2,\ \ m_2=-2$.

Άρα η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}.$$

Τώρα από τις αρχικές συνθήκες έχουμε, όταν $t=0$,

$$\left.\begin{aligned} x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}&=0\\ \frac{dx}{dt}=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} c_1+c_2&=0\\ 2c_1-2c_2&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2&=0\\ 2c_1-2c_2&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} c_1+c_2&=0\\ c_1-c_2&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} c_1+c_2&=0\\ 2c_1\quad&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\}.$$

Άρα $c_1=\dfrac{3}{4},\ \ c_2=-\dfrac{3}{4}$ και κατά συνέπεια η χαρακτηριστική λύση είναι:

$$x=\frac{3}{4}\left(e^{2t}-c_2e^{-2t}\right).$$

4.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

1. $\left(D^2-D-2\right)y=0$.
2. $\left(D^2+3D\right)y=0$.
3. $\left(D^3+2D^2-15D\right)y=0$.
4. $\left(D^3+2D^2-8D\right)y=0$.

5. $\frac{d^3v}{dt^3}-2\frac{d^2v}{dt^2}-3\frac{dv}{dt}=0$.

6. $\frac{d^3y}{dx^3}-7\frac{d^2y}{dx^2}+6y=0$.

7. $10\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+2y=0$.

8. $\frac{d^3y}{dx^3}-5\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0$.

4.3 Η ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

Σε περίπτωση που από τη χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτουν ρίζες που επαναλαμβάνονται, δηλαδή ενώ η εξίσωση είναι βαθμού n, οι διάφορες μεταξύ τους ρίζες αυτής είναι k, όπου $k \prec n$, τότε, προφανώς, δεν έχουμε n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της αντίστοιχης Δ.Ε. όπως συνέβαινε στην προηγούμενη περίπτωση.

Έστω η Δ.Ε. $f(D)y=0$, της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση είναι βαθμού n και έχει μια ρίζα, η οποία επαναλαμβάνεται n φορές, δηλαδή

$$m_1=m_2=\cdots=m_n=m,$$

τότε οι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της αντίστοιχης Δ.Ε. είναι οι εξής:

$$e^{mx},\ xe^{mx},\ x^2e^{mx}\ ,\ldots,\ x^{n-1}e^{mx}$$

και κατά συνέπεια η γενική λύση της δίνεται από την συνάρτηση:

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}+c_3x^2e^{mx}+\cdots+c_nx^{n-1}e^{mx}.$$

<u>Παράδειγμα 1ο</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$\frac{d^4y}{dx^4}-7\frac{d^3y}{dx^3}+18\frac{d^2y}{dx^2}-20\frac{dy}{dx}+8y=0.$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^4-7m^3+18m^2-20m+8=0,$$

που έχει ρίζες τις $m_1 = 1,\ \ m_2 = m_3 = m_4 = 2$ και έτσι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + c_4 x^2 e^{2x}$$

ή

$$y = c_1 e^x \left(c_2 + c_3 x + c_4 x^2\right) e^{2x} .$$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(D^4 + 2D^3 + D^2\right) y = 0 .$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^4 + 2m^3 + m^2 = 0$$

ή

$$m^2 (m+1)^2 = 0$$

και έχει τις εξής ρίζες $m_1 = m_2 = 0,\ \ m_3 = m_4 = -1$.

Άρα η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} .$$

4.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

1. $\left(4D^2 - 4D + 1\right) y = 0$.
2. $\left(D^3 - 4D^2 + 4D\right) y = 0$.
3. $\left(2D^4 - 3D^3 - 2D^2\right) y = 0$.
4. $\left(D^3 + 3D^2 - 4\right) y = 0$.
5. $\dfrac{d^5 x}{dt^5} - \dfrac{d^3 x}{dt^3} = 0$.
6. $\dfrac{d^3 y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.
7. $\left(D^4 + 3D^3 + 2D^2\right) y = 0$, όταν $x = 0,\ \ y = 0,\ \ y' = 4,\ \ y'' = -6,\ \ y''' = 14$.
8. $\left(D^4 + 3D^3 + 2D^2\right) y = 0$, όταν $x = 0,\ \ y = 0,\ \ y' = 3,\ \ y'' = -5,\ \ y''' = 9$.

4.5 Η ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ

Από τους τύπους του Euler έχουμε ότι:

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \quad \text{και} \quad e^{i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta ,$$

όπου $i^2 = -1$. Η συνάρτηση e^z, όπου $z = \alpha + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, έχει πολλές από τις ιδιότητες της πραγματικής συνάρτησης e^x. Αυτό όμως που εμείς χρειαζόμαστε εδώ είναι ότι αν

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} ,$$

όπου $\alpha,\ \beta$ και x πραγματικοί, τότε ισχύει ότι

$$(D - \alpha - i\beta)\, y = 0 .$$

Αν μια χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδική ρίζα, ήτοι $m_1 = a + bi$, θα πρέπει και ο συζυγής αυτής να είναι επίσης ρίζα, δηλαδή η $m_2 = a - bi$.

Έστω ότι για τη Δ.Ε.

$$f(D) = 0 \tag{1}$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση $f(m) = 0$, έχει ρίζες τις $m_1 = a + bi$ και $m_2 = a - bi$, τότε η Δ.Ε. (1) έχει ως λύση την

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx . \tag{2}$$

Αν μια χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη Δ.Ε. έχει επαναλαμβανόμενες μιγαδικές ρίζες, π.χ. αν οι $m = a \pm bi$ επαναλαμβάνονται τρεις φορές, τότε, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, οι έξι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν σε αυτές τις ρίζες θα εμφανίζονται στη γενική λύση της Δ.Ε. σε μια έκφραση όπως είναι η ακόλουθη.

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{ax} \cos bx + \left(c_4 + c_5 x + c_6 x^2\right) e^{ax} \sin bx .$$

<u>Παράδειγμα 1ο</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}+13y=0.$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^3-3m^2+9m+13=0,$$

μια ρίζα τη οποίας είναι η $m_1=-1$ και διαιρώντας τη χαρακτηριστική εξίσωση δια $m+1$ έχουμε ότι $m^3-3m^2+9m+13=(m+1)\left(m^2-4m+13\right)=0$.

Τώρα για τη δευτεροβάθμια $m^2-4m+13=0$ έχουμε

$$m_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}\quad\Rightarrow m_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2},$$

δηλαδή $m_2=2+3i$ και $m_3=2-3i$.

Συνεπώς η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι η

$$y=c_1e^{-x}+\mathrm{c}_2e^{2x}\cos3x+c_3e^{2x}\sin3x.$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(D^4+8D^3+16\right)y=0.$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στη δοθείσα Δ.Ε. είναι η

$$m^4+8m^3+16=0,$$

που είναι τέλειο τετράγωνο και γράφεται:

$$\left(m^2+4\right)^2=0,$$

οι ρίζες της οποίας είναι $m_1=m_2=2i$ και $m_3=m_4=-2i$. Αυτές οι ρίζες ως μιγαδικοί αριθμοί γράφονται $0+2i$ και $0-2i$. Επίσης, $e^{0x}=1$ και έτσι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y=\left(c_1+c_2x\right)\cos 2x+\left(c_3+c_4x\right)\sin 2x\,.$$

4.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$y=c_1e^{ax}+\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$$

ικανοποιεί τη Δ.Ε. $\left[(D-a)^2+b^2\right]y=0$.

2. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ.Ε.

α. $\left(D^2-2D+5\right)y=0$. β. $\left(D^2+9\right)y=0$.

γ. $\left(D^2+6D+13\right)y=0$. δ. $\left(D^2-4D+7\right)y=0$.

ε. $\left(D^2+1\right)y=0$, όταν $x=0$, $y=y_0$, $y'=0$.

4.7 ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Για τη μη ομογενή γραμμική Δ.Ε. τάξης n

$$\left(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n\right)y=r(x)\,, \tag{1}$$

υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι εύρεσης της γενικής λύσης. Εδώ θα αναπτύξουμε δυο από τις γνωστότερες και πλέον βασικές τέτοιες μεθόδους, για μη ομογενείς γραμμικές Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης, αυτές δηλαδή που εμφανίζονται συχνότερα σε πρακτικές εφαρμογές.

4.8 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΑΞΗΣ

Η μέθοδος υποβιβασμού της τάξης μιας μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης, οφείλεται στον d’Alembert[5].

Έστω η $2^{ης}$ τάξης μη ομογενής γραμμική Δ.Ε.

[5] d’Alembert (1717 – 1783) Γάλλος μαθηματικός και Εγκυκλοπαιδιστής.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2}$$

και έστω ότι η συνάρτηση $y = y_1$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3}$$

τότε εισάγοντας μια νέα μεταβλητή v, όπου

$$y = y_1 v, \tag{4}$$

έχουμε:

$$y' = y_1 v' + y_1' v$$

και

$$y'' = y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'' v.$$

Έτσι η εξίσωση (2), λόγω της σχέσης (3) και των δυο παραγώγων, γράφεται:

$$y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'' v + p(x) y_1 v' + p(x) y_1' v + q(x) y_1 v = r(x)$$

ή

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + p(x) y_1\right) v' + \left(y'' + p(x) y_1' + q(x) y_1\right) v = r(x). \tag{5}$$

Αφού όμως η $y = y_1$ είναι λύση της Δ.Ε. (3), η εξίσωση (5) γίνεται

$$y_1 v'' + \left(2y_1' + p(x) y_1\right) v' = r(x). \tag{6}$$

Τώρα, θέτοντας $v' = u$ στην εξίσωση (6) παίρνουμε:

$$y_1 u' + \left(2y_1' + p(x) y_1\right) u = r(x), \tag{7}$$

η οποία είναι μια γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης.

Για τη Δ.Ε. αυτή βρίσκουμε τη λύση με τη χρήση ενός πολλαπλασιαστή του Euler και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την $v' = u$ έχουμε την v καθώς και την $y = y_1 v$.

Να σημειώσουμε, τέλος, ότι η παραπάνω μέθοδος δεν απαιτεί η δοθείσα μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. να έχει σταθερούς συντελεστές, αρκεί να γνωρίζουμε μια ειδική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Παράδειγμα 1^{o}: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' - y = e^x .$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε. είναι η

$$m^2 - 1 = 0 ,$$

που έχει ρίζες $m_1 = 1$ και $m_2 = -1$. Έτσι, ειδικές λύσεις της $y'' - y = 0$ είναι οι e^x και e^{-x}.
Τώρα θέτοντας $y = ve^x$ έχουμε

$$y' = ve^x + v'e^x$$

και

$$y'' = ve^x + 2v'e^x + v''e^x .$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα Δ.Ε. παίρνουμε:

$$ve^x + 2v'e^x + v''e^x - ve^x - v'e^x = e^x$$

ή

$$v'' + 2v' = 1 .$$

Θέτοντας τώρα $v' = u$, η παραπάνω Δ.Ε. γίνεται:

$$u' + 2u = 1,$$

η οποία είναι μια γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης και με τον πολλαπλασιαστή του Euler $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ έχουμε:

$$e^{2x}u' + 2e^{2x}u = e^{2x}$$

ή

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}u\right) = e^{2x}.$$

Και έτσι

$$e^{2x}u = \frac{1}{2}e^{2x} + c,$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$v' = u = \frac{1}{2} + ce^{-2x}.$$

Άρα

$$v = \frac{1}{2}x + c_1 e^{-2x} + c_2$$

και κατά συνέπεια η γενική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι:

$$y = \frac{1}{2}xe^{x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}.$$

Παράδειγμα 2^{o}: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'' + y = \csc x.$$

Λύση: Να θυμηθούμε εδώ ότι η γενική λύση μιας μη ομογενούς Δ.Ε. δίνεται από τη σχέση:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x),$$

όπου η $y_p(x)$ είναι μια ειδική λύση αυτής και η $y_c(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε. είναι η

$$m^2 + 1 = 0,$$

που έχει ρίζες $m_1 = i$ και $m_2 = -i$. Έτσι, η γενική λύση της ομογενούς $y'' + y = 0$ είναι η

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Παίρνοντας μια από τις λύσεις, έστω την $\sin x$ και θέτοντας $y = v \sin x$, έχουμε:

$$y' = v' \sin x + v \cos x$$

και

$$y'' = v'' \sin x + 2v' \cos x - v \sin x .$$

Από τη δοθείσα Δ.Ε. έχουμε τώρα ότι

$$v'' \sin x + 2v' \cos x = \csc x$$

ή

$$v'' + 2v' \cot x = \csc^2 x ,$$

(αφού $\dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ και $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$).

Θέτουμε στην παραπάνω Δ.Ε. $v' = u$ και παίρνουμε:

$$u' + 2u \cot x = \csc^2 x ,$$

της οποίας ένας πολλαπλασιαστής του Euler είναι ο

$$e^{\int 2\cot dx} = e^{2\ln|\sin x|} = e^{\ln(\sin x)^2} = \sin^2 x .$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\sin^2 x$ και τα δυο μέλη της τελευταίας Δ.Ε. έχουμε:

$$u' \sin^2 x + 2u \sin^2 x \cot x = \sin^2 x \csc^2 x$$

ή

$$\sin^2 x du + 2u \sin x \cos x dx = dx ,$$

η οποία είναι ακριβής και με ολοκλήρωση μας δίνει μια ειδική λύση:

$$u\sin^2 x = x .$$

Λύνουμε ως προς $u(=v')$ και έχουμε:

$$u = v' = x\csc^2 x .$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και παίρνουμε:

$$v = -x\cot x + \ln|\sin x| .$$

Τώρα, αφού $y = v\sin x$, η ειδική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι η

$$y_p = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

και κατά συνέπεια η ζητούμενη γενική λύση είναι:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x| .$$

4.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε. με τη μέθοδο του υποβιβασμού τάξης.

1. $\left(D^2-1\right)y = x-1$.
2. $\left(D^2-5D+6\right)y = 2e^x$.
3. $\left(D^2-4D+4\right)y = e^x$.
4. $\left(D^2+4\right)y = \sin x$.
5. $\left(D^2+2D+1\right)y = \left(e^x-1\right)^{-2}$.
6. Με αντικατάσταση της $y = v\sin x$ να λυθεί το $2^{\text{ο}}$ παράδειγμα πιο πάνω.

4.10 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Η μέθοδος που θα αναπτύξουμε παρακάτω ονομάζεται *μέθοδος μεταβολής των σταθερών* ή *μέθοδος του Lagrange*[6].

Έστω η μη ομογενής Δ.Ε. $2^{\text{ης}}$ τάξης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

[6] Lagrange, Joseph L. (1736 – 1813) Γάλλος μαθηματικός.

και ότι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

είναι η

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{3}$$

όπου οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\ \beta)$.

Με τη μέθοδο της μεταβολής των σταθερών, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \tag{4}$$

και προσπαθούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$, έτσι ώστε η σχέση (4) να είναι μια λύση της Δ.Ε. (1) πιο πάνω. Προς αυτή την κατεύθυνση ακολουθούμε τα εξής βήματα.

Από την (4) έχουμε ότι

$$y' = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x) + A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x). \tag{5}$$

Θέτουμε στην πιο πάνω σχέση (5)

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \tag{6}$$

και παραγωγίζοντάς την παίρνουμε:

$$y'' = A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) + A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x). \tag{7}$$

Αφού η συνάρτηση y είναι λύση της Δ.Ε. (1), αντικαθιστώντας σε αυτήν τις (4), (5) και (7) έχουμε:

$$A\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + B\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) + A'y_1' + B'y_2' = r(x), \tag{8}$$

(όπου $A = A(x),\ B = B(x),\ p = p(x)$ και $q = q(x)$).

Όμως οι $y_1 = y_1(x)$ και $y_2 = y_2(x)$ είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2), δηλαδή στη σχέση (8) έχουμε ότι

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

και αυτή δίνει:

$$A'(x)\,y_1' + B'(x)\,y_2' = r(x). \qquad (9)$$

Οι εξισώσεις (6) και (9) πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα, σαν σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους, ήτοι τις $A'(x)$ και $B'(x)$. Η λύση του συστήματος υπάρχει αν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (10)$$

Η ορίζουσα αυτή όμως είναι η ορίζουσα Wronski για τις y_1 και y_2, οι οποίες ως λύσεις τις Δ.Ε. (2) είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ και, ως εκ τούτου, πρέπει να ισχύει η (10).

Άρα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των (6) και (9) ως προς $A'(x)$ και $B'(x)$, απ' όπου, με ολοκλήρωση βρίσκουμε τις $A(x)$ και $B(x)$, οι οποίες αν αντικατασταθούν στη σχέση (4) παίρνουμε την ειδική λύση y_p τις Δ.Ε. (1).

<u>Παράδειγμα 1ο</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y'' + y = \sec x \tan x. \qquad (11)$$

<u>Λύση</u>: Όπως έχουμε ήδη δείξει, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. είναι η

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Αναζητούμε μια ειδική λύση της δοθείσας Δ.Ε., με τη μέθοδο Lagrange και θέτουμε:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x, \qquad (12)$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$y' = -A(x)\sin x + B(x)\cos x + A'(x)\cos x + B'(x)\sin x.$$

Τώρα θέτουμε

$$A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \tag{13}$$

και έτσι

$$y' = -A(x)\sin x + B(x)\cos x,$$

καθώς επίσης και

$$y'' = -A(x)\cos x - B\sin x - A'(x)\sin x + B'(x)\cos x. \tag{14}$$

Αντικαθιστούμε τις (14) και (12) στη Δ.Ε. (11) και έχουμε:

$$-A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \sec x \tan x. \tag{15}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (13) επί $\tan x\left(=\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$ και παίρνουμε:

$$A'(x)\sin x + B'(x)\sin x \tan x = 0 \tag{16}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (15) και (16) και έχουμε:

$$B'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\cos x + \sin x \tan x}$$

ή

$$B'(x) = \frac{\dfrac{\tan x}{\cos x}}{\cos x + \sin x \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\tan x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x}} \Rightarrow B'(x) = \tan x.$$

Έτσι

$$B(x) = \int \tan x dx = \ln|\sec x|,$$

χωρίς αυθαίρετη σταθερά αφού αναζητούμε μια ειδική λύση της Δ.Ε. (11).

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (13) επί $co\mathrm{t}\, x\left(=\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$ και παίρνουμε:

$$A'(x)\frac{\cos^2 x}{\sin x} + B'(x)\cos x = 0 \tag{17}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (15) και (17) και έχουμε:

$$-A'(x)\sin x - A'(x)\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \sec x \tan x$$

ή

$$A'(x) = -\frac{\sec x \tan x}{\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}} = -\frac{\sec x \tan x}{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x}}$$

$$\Rightarrow \quad A'(x) = -\sin x \sec x \tan x$$

ή

$$A'(x) = -\tan^2 x = -\left(1 - \sec^2 x\right).$$

Έτσι

$$A(x) = -\int \left(1 - \sec^2 x\right) dx = x - \tan x,$$

ξανά χωρίς αυθαίρετη σταθερά.

Η ειδική λύση της δοθείσας μη ομογενούς Δ.Ε. είναι η

$$y_p = (x - \tan x)\cos x + \sin x \ln\left|\sec x\right|$$

ή

$$y_p = x\cos x - \sin x + \sin x \ln\left|\sec x\right|.$$

Συνεπώς η ζητούμενη γενική λύση της Δ.Ε. (11) είναι η

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_3 \sin x + x\cos x + \sin x \ln\left|\sec x\right|.$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left(D^2 - 3D + 2\right)y = \frac{1}{1+e^{-x}}. \tag{18}$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση για την ομογενή Δ.Ε. είναι η

$$m^2 - 3m + 2 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $m_1 = 1$ και $m_2 = 2$.

Έτσι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. είναι:

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Αναζητούμε μια ειδική λύση της δοθείσας Δ.Ε., με τη μέθοδο Lagrange και θέτουμε:

$$y = A(x)e^x + B(x)e^{2x}. \tag{19}$$

Συνεπώς

$$y' = A(x)e^x + 2B(x)e^{2x} + A'(x)e^x + B'(x)e^{2x}$$

και θέτοντας

$$A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} = 0, \tag{20}$$

παίρνουμε:

$$y' = A(x)e^x + 2B(x)e^{2x} \tag{21}$$

και

$$y'' = A(x)e^x + 4B(x)e^{2x} + A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x}. \tag{22}$$

Αντικαθιστώντας τις (19), (21) και (22) στη δοθείσα Δ.Ε. έχουμε:

$$A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}}. \tag{23}$$

Από τις (20) και (23) απαλείφουμε τη $B'(x)$ και παίρνουμε:

$$-A'(x)e^x = \frac{1}{1+e^{-x}},$$

απ' όπου

$$A'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

και έτσι

$$A(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right).$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε:

$$B'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ή

$$B'(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$$

και έτσι

$$B(x) = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx = \int\left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx,$$

δηλαδή

$$B(x) = -e^{-x} + \ln\left(1+e^{-x}\right).$$

Συνεπώς η ειδική λύση της Δ.Ε. (18) είναι η

$$y_p = e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) - e^x + e^{2x}\ln\left(1+e^{-x}\right).$$

Άρα η ζητούμενη γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x\ln\left(1+e^{-x}\right) - e^x + e^{2x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

ή

$$y = c_3e^x + c_2e^{2x} + \left(e^x + e^{2x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right).$$

4.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη μέθοδο του Lagrange να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω μη ομογενών γραμμικών Δ.Ε.

1. $y'' - y = e^x + 1$.
2. $y'' + y = \csc x \cot x$.
3. $y'' + y = \csc x$.
4. $y'' + y = \sec^3 x$.
5. $\left(D^2 + 2D + 2\right)y = e^{-x}\csc x$.
6. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = \cos\left(e^{-x}\right)$.
7. $\left(D^2 + 1\right)y = \sec^4 x$.
8. $\left(D^2 + 1\right)y = \tan x$.
9. $\left(D^2 + 1\right)y = \tan^2 x$.
10. $\left(D^2 + 1\right)y = \sec^2 x \csc x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

5.11 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Έστω η Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$y'' + 2y' - y = e^x . \tag{1}$$

Θέτοντας $v = y'$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$v' = y - 2v + e^x .$$

Κατά συνέπεια η Δ.Ε. δεύτερης τάξης (1) αντικαταστάθηκε από το σύστημα των Δ.Ε. πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} y' = v \\ v' = y - 2v + e^x \end{array}\right\} . \tag{2}$$

Με παρόμοιο τρόπο μια Δ.Ε. τρίτης τάξης, όπως είναι η

$$y''' + 2y'' - y' + 3y = x , \tag{3}$$

μπορεί να γραφεί ως σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης, με την επιλογή των νέων μεταβλητών

$$v = y' \quad \text{και} \quad u = v' = y'' .$$

Έτσι η Δ.Ε. (3) γίνεται:

$$u' = -2u + v + 3y + x$$

και κατά συνέπεια, το σύστημα πρώτης τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} y' = v \\ v' = u \\ u' = v - 2u - 3y + x \end{array}\right\} , \tag{4}$$

είναι ισοδύναμο με τη Δ.Ε. (3).

5.12 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να αντικατασταθούν οι παρακάτω Δ.Ε. με συστήματα πρώτης τάξης.

1. $y'' - 6y' + 8y = x + 2$.
2. $y'' + 4y' + 4y = e^x$.
3. $y'' + py' + qy = f(x)$.
4. $y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$.

5.13 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω το σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 3y \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

το οποίο, με τη χρήση του διαφορικού τελεστή, γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} Dx - y &= 0 \\ (D-3)y + 2x &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Εφαρμόζουμε τον τελεστή $D-3$ στην πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος (2) και προσθέτοντας τις δυο εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε:

$$(D-3)Dx + 2x = 0$$

ή

$$\left(D^2 - 3D + 2\right)x = 0. \tag{3}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον τελεστή D στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2), πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$D(D-3)y + 2y = 0$$

ή

$$\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 0. \tag{4}$$

Από τις εξισώσεις (3) και (4) βλέπουμε ότι η λύση του συστήματος (1) δίνεται από τις

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t},$$

$$y = c_3 e^{2t} + c_4 e^{t},$$

όπου η σχέση μεταξύ των αυθαίρετων σταθερών $c_{1,}$ c_2, c_3 και c_4 μπορεί να βρεθεί αν αντικαταστήσουμε τις λύσεις στο σύστημα (1).

Συστήματα Δ.Ε. όπως το (1) παραπάνω μπορούν να γραφούν, με τη χρήση της γραμμικής άλγεβρας, ως εξής:

$$X' = AX, \tag{5}$$

ή

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

όπου A, είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών, X είναι ο $n \times 1$ πίνακας (στήλη) των αγνώστων π.χ. $x, y, \ldots$ και τέλος, X' (ή $\frac{dX}{dt}$) είναι ο πίνακας στήλη των παραγώγων $\frac{dx}{dy}, \frac{dy}{dy}, \ldots$.

Για παράδειγμα το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y \end{aligned}\right\},$$

στη μορφή (5) έχει

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ και } X' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dx} \end{bmatrix}.$$

Συστήματα Δ.Ε. της μορφής:

$$X' = AX + B(t), \tag{6}$$

όπου $B(t)$ είναι ένας $n\times 1$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι γνωστές συναρτήσεις της μεταβλητής t και οι $A,\ X,\ X'$ όπως στο σύστημα (5) πιο πάνω, ονομάζονται *μη ομογενή γραμμικά συστήματα*, ενώ αν $B(t)=0$, τότε προκύπτει ένα σύστημα της μορφής (5) και ονομάζεται *ομογενές σύστημα Δ.Ε.*.

Ένα ομογενές σύστημα της μορφής (5), όπως ίσως μας προτρέπει να πιστεύουμε η λύση του συστήματος (1) παραπάνω, πρέπει να έχει λύσεις της μορφής:

$$X = Ce^{mt}, \tag{7}$$

όπου C είναι ένα διάνυσμα σταθερών και m είναι ένας σταθερός αριθμός που θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (7) έχουμε:

$$X' = mCe^{mt}. \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τις (7) και (8) στο ομογενές σύστημα (5) παίρνουμε:

$$mCe^{mt} = ACe^{mt}$$

ή

$$(A - mI)Ce^{mt} = 0, \tag{9}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας και 0 είναι ο αντίστοιχος $n\times n$ μηδενικός πίνακας.

Η εξίσωση (9) ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς t μόνον αν

$$(A - mI)C = 0, \tag{10}$$

αφού $e^{mt} \neq 0$ για κάθε πραγματικό t.

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το σύστημα (10) έχει μη μηδενικές λύσεις μόνον αν η ορίζουσα του πίνακα $A - mI$ είναι μηδέν, ήτοι

$$|A - mI| = 0. \tag{11}$$

Η εξίσωση (11) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n του άγνωστου αριθμού m. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του πίνακα A και η εξίσωση (11) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* αυτού.

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται *ιδιοτιμές* ή *χαρακτηριστικές τιμές* του πίνακα A.

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα C_1 που είναι λύση της εξίσωσης (10), για κάποια ιδιοτιμή m_1, ονομάζεται *ιδιοδιάνυσμα* ή *χαρακτηριστικό διάνυσμα* του πίνακα A, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή m_1.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για να λύσουμε ένα ομογενές σύστημα Δ.Ε. της μορφής (5), πρέπει πρώτα να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Παράδειγμα 1^o: Να λυθεί το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x+3y \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

με την παραπάνω μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Λύση: Το σύστημα (12) στη μορφή (5) γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

και έτσι $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0 .$$

Έτσι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι $m_1 = 1$ και $m_2 = 2$.

Για την $m_1 = 1$, η εξίσωση (10) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

απ' όπου έχουμε ότι $-c_1 + c_2 = 0$ ή $c_1 = c_2$. Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $m_1 = 1$ είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Με τον ίδιο τρόπο, για την ιδιοτιμή $m_2 = 2$, η εξίσωση (10) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και δίνει ως ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς έχουμε δυο διαφορετικά σύνολα λύσεων του συστήματος (13), τα οποία είναι τα

$$X_1 = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t \quad \text{και} \quad X_2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{2t}, \tag{14}$$

όπου k_1 και k_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι τα διανύσματα της σχέσης (14) είναι λύσεις του συστήματος (13). Επίσης, αφού η ορίζουσα Wronski αυτών των λύσεων, για $k_1 = k_2 = 1$, είναι:

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^t \cdot 2e^{2t} - e^t \cdot e^{2t} = e^{3t}$$

και αφού $e^{3t} \neq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό t, τα X_1 και X_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα, η γενική λύση του συστήματος (13), δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό:

$$X(t) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{2t}.$$

Παράδειγμα 2^o: Να λυθεί το σύστημα

$$X' = AX, \text{ όπου } \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 0 & 1-m & 3 \\ 0 & 3 & 1-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-m)\left[(1-m)^2 - 9\right] = 0$$

ή

$$(1-m)(m-4)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = 4,\ m_3 = -2.$$

Για την ιδιοτιμή $m_1 = 1$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

απ’ όπου έχουμε ότι $c_1 = c_1,\ c_2 = c_3 = 0$. Και έτσι μια λύση του συστήματος (15) είναι ή

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t.$$

Για την ιδιοτιμή $m_2 = 4$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\left.\begin{aligned} 3c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; c_1 = 2,\; c_2 = c_3 = -3,$$

απ’ όπου έχουμε μια δεύτερη λύση του συστήματος(15), που είναι η

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Για την ιδιοτιμή $m_3 = -2$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

απ’ όπου έχουμε ότι $c_1 = 0,\; c_2 = -c_3$. Και έτσι μια ακόμη λύση του συστήματος (15) είναι ή

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Τώρα η ορίζουσα Wronski των τριών λύσεων του συστήματος (15), για $t = 0$, είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Συνεπώς οι διανυσματικές συναρτήσεις $X_1,\; X_2,\; X_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (15) και έτσι η γενική λύση αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$X(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} e^{4t} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Στα παραπάνω δυο παραδείγματα, οι ιδιοτιμές των πινάκων που αντιστοιχούσαν στα γραμμικά συστήματα των Δ.Ε. ήταν διαφορετικές μεταξύ τους και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα. Το γεγονός αυτό δεν είναι τυχαίο, αλλά συμβαίνει πάντα λόγω του παρακάτω.

Θεώρημα: Αν $m_1, m_2, ..., m_r$ είναι ιδιοτιμές, διάφορες μεταξύ τους, ενός $n\times n$ πίνακα και αν $X_1, X_2, ..., X_r$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

5.14 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα Δ.Ε. $X' = AX$, όπου

1. $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $A=\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$.

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.

5. $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

7. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.15 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

Μέχρι τώρα είδαμε συστήματα Δ.Ε. των οποίων οι αντίστοιχοι πίνακες είχαν πραγματικές ιδιοτιμές. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών.

<u>Παράδειγμα 1^{o}</u>: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1}$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 2 & -4-m \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (2-m)(-4-m)+10=0$$

ή

$$m^2+2m+2=0,$$

η οποία έχει ρίζες, ιδιοτιμές του πίνακα, τις $m_1=-1+i$ και $m_2=-1-i$.

Για την ιδιοτιμή $m_1=-1=i$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

απ' όπου παίρνουμε $c_2=\dfrac{3-i}{5}c_1$ και επιλέγοντας $c_1=5$ έχουμε το $\begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix}$, ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην παραπάνω ιδιοτιμή.

Άρα μια λύση του συστήματος (1) είναι η

$$X_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}. \tag{2}$$

Με τον ίδιο τρόπο, για την ιδιοτιμή $m_2=-1-i$, έχουμε την εξής λύση του συστήματος (1):

$$X_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3+i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}. \tag{3}$$

Οι δυο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες (γιατί;) και συνεπώς, η γενική λύση του δοθέντος συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3+i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}. \tag{4}$$

Με τη χρήση του γνωστού τύπου του Euler,

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right),$$

η λύση (4) πιο πάνω μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix} e^{-t}\left(\cos t + i\sin t\right) + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3+i \end{bmatrix} e^{-t}\left(\cos t - i\sin t\right).$$

<u>Παράδειγμα 2$^{\text{ο}}$</u>: Να λυθεί το σύστημα

$$X' = AX, \text{ όπου } \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m & 1 \\ 0 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (1-m)\left[(1-m)(1-m)+1\right] = 0$$

ή

$$(1-m)\left(m^2 - 2m + 2\right) = 0,$$

οι ρίζες τις οποίας είναι $m_1 = 1,\ m_2 = 1+i$ και $m_3 = 1-i$.

Στην ιδιοτιμή $m_1 = 1$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και, έτσι έχουμε μια λύση του συστήματος (5), την

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t .$$

Στην ιδιοτιμή $m_2 = 1 + i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$ και, έτσι έχουμε μια ακόμη λύση του συστήματος (5), την

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} .$$

Ομοίως, από την ιδιοτιμή $m_3 = 1 - i$ παίρνουμε μια τρίτη λύση του συστήματος (5), ήτοι την

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(1-i)t} .$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος (5) είναι η

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} + c_3 \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(1-i)t}$$

ή, από τον τύπο του Euler,

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{bmatrix} e^t (\cos t + i \sin t) + c_3 \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} e^t (\cos t - i \sin t) .$$

5.16 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα Δ.Ε. $X' = AX$, όπου

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -13 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5.17 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, τις περιπτώσεις εκείνων των συστημάτων Δ.Ε., $X' = AX$, όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα A δεν είναι διάφορες μεταξύ τους, αλλά κάποιες ή όλες επαναλαμβάνονται.

<u>**Παράδειγμα 1^{o}:**</u> Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

<u>**Λύση:**</u> Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(4-m)+4=0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0.$$

Οπότε έχουμε μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, την $m_1 = m_2 = 2$, από την οποία παίρνουμε μια λύση του συστήματος (1), την εξής:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}. \tag{2}$$

Τώρα για μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση ενεργούμε όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, με μέθοδο όπως αυτή της μεταβολής των συντελεστών και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λύση της μορφής:

$$X_2 = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} e^{2t}, \tag{3}$$

όπου οι $c_1(t)$ και $c_2(t)$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t.

Παραγωγίζουμε την (3) και αντικαθιστούμε στο σύστημα (1) για να πάρουμε:

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} 2e^{2t} + \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}.$$

Κάνοντας τις πράξεις και λύνοντας ως προς $c_1'(t)$ και $c_2'(t)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(t) &= -2c_1(t) + c_2(t) \\ c_2'(t) &= -4c_1(t) + 2c_2(t) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

απ' όπου $c_2'(t) = 2c_1'(t)$ και με ολοκλήρωση έχουμε ότι $c_2(t) = 2c_1(t) + a$, όπου a μια αυθαίρετη σταθερά.

Με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση του συστήματος (4) έχουμε:

$$c_1'(t) = a \quad \text{ή} \quad c_1(t) = at + b.$$

Συνεπώς, μια λύση του συστήματος Δ.Ε. (4) είναι η

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= at + b \\ c_2(t) &= 2at + 2b + a \end{aligned}\right\},$$

για αυθαίρετες σταθερές a και b. Η εξίσωση (3) γίνεται τώρα

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ate^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} be^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ae^{2t}. \tag{5}$$

Επιλέγουμε στην (5) $a=1$ και $b=0$, ώστε να πάρουμε:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}. \tag{6}$$

Για $t=0$, η ορίζουσα Wronski των λύσεων X_1 και X_2 είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και κατά συνέπεια οι δυο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση του δοθέντος συστήματος (1) δίνεται από την

$$X(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + k_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \right\}.$$

<u>Παράδειγμα 2$^{\text{ο}}$</u>: Να λυθεί το σύστημα

$$X' = AX, \text{ όπου } \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

<u>Λύση</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} 8-m & -1 \\ 4 & 12-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m-10)^2 = 0.$$

Οπότε έχουμε μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, την $m_1 = m_2 = 10$, από την οποία παίρνουμε μια λύση του συστήματος (7), της εξής:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{10t}. \tag{8}$$

Έχοντας ως πρότυπο το προηγούμενο παράδειγμα, αναζητούμε μια δεύτερη λύση της μορφής:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} te^{10t} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{10t}. \tag{9}$$

Τώρα, παραγωγίζοντας την (9) και αντικαθιστώντας στο αρχικό σύστημα (7) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} 10te^{10t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{10t} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} 10e^{10t} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} te^{10t} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{10t}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} 10te^{10t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{10t} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} 10e^{10t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} 10te^{10t} + \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{10t}$$

ή

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Μια λύση του συστήματος (10) είναι η $c_1 = 0$ και $c_2 = -1$. Οπότε η λύση X_2 του (7) γίνεται:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} te^{10t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{10t}.$$

Για $t = 0$ η ορίζουσα Wronski των λύσεων X_1 και X_2 είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

και κατά συνέπεια οι δυο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση του δοθέντος συστήματος (1) δίνεται από την

$$X(t) = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{10t} + c_3 e^{10t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.18 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα Δ.Ε. $X' = AX$, όπου

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$.
2. $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$.
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

5.19 ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

Ερχόμαστε τώρα στα μη ομογενή συστήματα Δ.Ε. της μορφής

$$X' = AX + B(t), \tag{1}$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας σταθερών και $B(t)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση της μεταβλητής t. Αρκεί να βρούμε μια ειδική λύση X_p του (1) και να την προσθέσουμε στη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος για να έχουμε, έτσι τη γενική λύση και του μη ομογενούς συστήματος (1). Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή της μεταβολής των συντελεστών (μέθοδος Lagrange).

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$X' = AX + B(t), \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Λύση: Από το παράδειγμα 1 της παραγράφου 5.3 έχουμε ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $X' = AX$ είναι η

$$X_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}, \tag{2}$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Τώρα αναζητούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος (1) της μορφής:

$$X_p(t) = c_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}, \tag{3}$$

όπου $c_1(t)$ και $c_2(t)$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t.

Παραγωγίζοντας την (3) και αντικαθιστώντας στο (1) έχουμε:

$$c_1(t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t+2c_2(t)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}+c_1'(t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t+c_2'(t)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}c_1(t)e^t+\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}c_2(t)e^{2t}+\begin{bmatrix}f(t)\\g(t)\end{bmatrix}, \qquad (4)$$

απ’ όπου, μετά από πράξεις με τους πίνακες και διαγράφοντας τους αντίθετους όρους που προκύπτουν αφού η $X_p(t)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος, παίρνουμε:

$$c_1'(t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t+c_2'(t)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}=\begin{bmatrix}f(t)\\g(t)\end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Η (5) παραπάνω, γράφεται ως εξίσωση πινάκων:

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1'(t)e^t\\c_2'(t)e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(t)\\g(t)\end{bmatrix},$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε κάνοντας χρήση του γνωστού κανόνα του Cramer[7] και έχουμε:

$$c_1'(t)e^t=\frac{\begin{vmatrix}f(t)&1\\g(t)&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}}=2f(t)-g(t),$$

$$c_2'(t)e^{2t}=\frac{\begin{vmatrix}1&f(t)\\1&g(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}}=g(t)-f(t).$$

Άρα

$$c_1'(t)=\left[2f(t)-g(t)\right]e^{-t},$$

[7] Cramer, Gabriel (1704 – 1752) Ελβετός μαθηματικός.

$$c_2'(t) = \left[g(t) - f(t)\right]e^{-2t}.$$

Αν σε αυτό το σημείο είχαμε δεδομένες τις δυο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$, με ολοκλήρωση θα υπολογίζαμε τις $c_1(t)$ και $c_2(t)$ και, κατά συνέπεια, θα βρίσκαμε τη γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος (1).

Έστω, για παράδειγμα, ότι $f(t) = e^t$ και $g(t) = 1$, τότε

$$c_1'(t) = \left[2e^t - 1\right]e^{-t} = 2 - e^{-t},$$

$$c_2'(t) = \left[1 - e^t\right]e^{-2t} = e^{-2t} + e^{-t},$$

απ' όπου, ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$c_1(t) = 2t + e^{-t},$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}.$$

Οπότε η ειδική λύση του συστήματος (1) για $f(t) = e^t$ και $g(t) = 1$, είναι

$$X_p(t) = \left(2t + e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}$$

ή

$$X_p(t) = \left(2te^t + 1\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \left(e^t - \frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Τέλος, η γενική λύση του συστήματος (1), δίνεται από τη σχέση:

$$X(t) = X_c(t) + X_p(t),$$

δηλαδή

$$X(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t} + \left(2te^t + 1\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \left(e^t - \frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

5.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν τα παρακάτω μη ομογενή συστήματα Δ.Ε. $X' = AX + B(t)$, όπου

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ και $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ και $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^t \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ και $B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^o

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

6.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΣΤΕΡΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΜΙΑΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ Δ.Ε.

Στο 2^o κεφάλαιο είδαμε κάποιους τύπους μη γραμμικών Δ.Ε. πρώτης τάξης, όπως αυτές των χωριζόμενων μεταβλητών, ομογενών και ακριβών, για τις οποίες αναπτύξαμε τεχνικές επίλυσης. Σε γενικές γραμμές όμως η επίλυση μη γραμμικών Δ.Ε. πρώτης τάξης δεν είναι εύκολη υπόθεση, ούτε υπάρχουν συγκεκριμένες μέθοδοι επίλυσή τους, όπως για τις γραμμικές εξισώσεις.

Σε τούτο το κεφάλαιο θα δούμε μερικές ακόμη μη γραμμικές Δ.Ε. και κάποιες επί πλέον τεχνικές εύρεσης λύσεων αυτών.

Για Δ.Ε. της μορφής

$$f(x,y,y')=0\,, \tag{1}$$

για τις οποίες μπορούμε να γράψουμε το αριστερό μέλος ως γινόμενο παραγόντων, τότε το πρόβλημα επίλυσή τους ανάγεται σε επίλυση δυο ή περισσοτέρων, αλλά ευκολότερων προβλημάτων.

<u>Παράδειγμα 1^o</u>: Να λυθεί η μη γραμμική Δ.Ε.

$$xy(y')^2+(x+y)y'+1=0\,. \tag{2}$$

<u>Λύση</u>: Η (2) γράφεται

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}+1=0$$

ή

$$x\frac{dy}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}+1\right)+\left(y\frac{dy}{dx}+1\right)=0$$

ή

$$\left(x\frac{dy}{dx}+1\right)\left(y\frac{dy}{dx}+1\right)=0\,.$$

Άρα

$$x\frac{dy}{dx}+1=0 \tag{3}$$

ή

$$y\frac{dy}{dx}+1=0\,. \tag{4}$$

Από την εξίσωση (3) παίρνουμε:

$$xdy+dx=0\,,$$

την οποία, για $x\neq 0$, χωρίζουμε τις μεταβλητές και έχουμε:

$$dy+\frac{dx}{x}=0\,,$$

απ' όπου παίρνουμε τη λύση:

$$y=-\ln\left|c_1x\right|. \tag{5}$$

Από την εξίσωση (4) παίρνουμε:

$$ydy+dx=0\,,$$

η λύση της οποίας είναι:

$$y^2=-2\left(x-c_2\right). \tag{6}$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>: Να λυθεί η μη γραμμική Δ.Ε.

$$x^2\left(y'\right)^2-y^2=0\,. \tag{7}$$

<u>Λύση</u>: Η (7) γράφεται

$$\left(xy'-y\right)\left(xy'+y\right)=0\,,$$

από την οποία έχουμε:

$$x\frac{dy}{dx}-y=0 \tag{8}$$

ή

$$x\frac{dy}{dx}+y=0\,. \qquad (9)$$

Από την εξίσωση (8) παίρνουμε:

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0\,,$$

απ' όπου έχουμε τη λύση:

$$\ln y-\ln x=\ln c_1$$

ή

$$y=c_1 x\,.$$

Από την εξίσωση (9) παίρνουμε:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0\,,$$

απ' όπου έχουμε τη λύση:

$$\ln y+\ln x=\ln c_2$$

ή

$$xy=c_2\,.$$

6.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω μη γραμμικών Δ.Ε.

1. $x\left(y'\right)^2-\left(2x+3y\right)y'+6y=0$.

2. $x^2\left(y'\right)^2-5xyy'+6y^2=0$.

3. $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y^2-y=0$.

4. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(1-x^2y\right)\frac{dy}{dx}-xy=0$.

6.3 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω ότι η Δ.Ε.

$$f(x,y,y')=0 \tag{1}$$

είναι τέτοια ώστε να μπορεί να λυθεί ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή y και να δώσει μια εξίσωση της μορφής:

$$y=g(x,y'). \tag{2}$$

Αν θέσουμε στην εξίσωση (2) $p=\frac{dy}{dx}$, χάριν συντομίας και την παραγωγίσουμε ως προς x, θα πάρουμε μια νέα Δ.Ε. της μορφής:

$$q\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0, \tag{3}$$

η οποία περιέχει μόνον τις μεταβλητές x και p. Αν τώρα είναι δυνατόν να λύσουμε τη Δ.Ε., θα έχουμε δυο εξισώσεις που σχετίζουν τις x, y και p, δηλαδή τις (2) και (3).

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η μη γραμμική Δ.Ε.

$$xp^2-3yp+9x^2=0, \quad \text{για} \quad x\succ 0. \tag{4}$$

<u>Λύση</u>: Η (4) γράφεται ως εξής:

$$3y=xp+\frac{9x^2}{p}. \tag{5}$$

Παραγωγίζουμε τώρα και τα δυο μέλη της εξίσωσης (5) και παίρνουμε:

$$3p=p+\frac{18x}{p}+\left(x-\frac{9x^2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

ή

$$2p\left(1-\frac{9x}{p^2}\right)=x\left(1-\frac{9x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}. \tag{6}$$

Από την (6) συμπεραίνουμε ότι, αν

$$1-\frac{9x}{p^2}\neq 0,$$

τότε

$$2p=x\frac{dp}{dx} \tag{7}$$

ή αλλιώς,

$$1-\frac{9x}{p^2}=0. \tag{8}$$

Η Δ.Ε. (7) είναι χωριζόμενων μεταβλητών, δηλαδή

$$2\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p}$$

και έτσι

$$p=cx^2. \tag{9}$$

Τώρα, από τη δοθείσα εξίσωση (4) και τη λύση (9) έχουμε ότι

$$x\left(cx^2\right)^2-3ycx^2+9x^2=0$$

και αφού $x\succ 0$,

$$c^2x^3-3cy+9=0$$

ή

$$y=\frac{k^2x^3+1}{k}, \tag{10}$$

όπου $k=\frac{c}{3}$.

Ερχόμενοι τώρα στην εξίσωση (8), έχουμε:

$$p^2=9x \;\Rightarrow\; p=\pm 3\sqrt{x}$$

και αντικαθιστώντας στην αρχική Δ.Ε. (4) παίρνουμε:

$$y^2 = 4x^3 \;\Rightarrow\; y = \pm 2\sqrt{x^3}\,. \tag{11}$$

Άρα η (10) είναι η γενική λύση της μη γραμμικής Δ.Ε. (4) και η (11) δυο ειδικές λύσεις αυτής.

6.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω μη γραμμικών Δ.Ε.

1. $p^2 + x^3 p - 2x^2 y = 0$.

2. $p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$.

3. $2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 6y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x^4 = 0$.

4. $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$.

6.5 ΑΛΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ Δ.Ε.

Α. Απουσία της εξαρτημένης μεταβλητής

Έστω η μη γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$f\left(x, y', y''\right) = 0\,, \tag{1}$$

στην οποία δεν υπάρχει η εξαρτημένη μεταβλητή y. Αν θέσουμε $p = y'$, παίρνουμε:

$$f\left(x, p, p'\right) = 0\,, \tag{2}$$

που είναι πρώτης τάξης της εξαρτημένης μεταβλητής p. Αν μπορούμε να λύσουμε την (2) ως προς p, τότε μπορούμε να βρούμε και την y με ολοκλήρωση από την $p = y'$.

Παράδειγμα: Να λυθεί η μη γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$xy'' - (y')^3 - y' = 0 . \tag{3}$$

<u>Λύση</u>: Θέτουμε $y' = p$, απ' όπου $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ και η (3) γίνεται

$$x\frac{dp}{dx} - p^3 - p = 0 ,$$

στην οποία μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές, ήτοι

$$\frac{dp}{p(p^2+1)} = \frac{dx}{x}$$

ή

$$\frac{dp}{p} - \frac{pdp}{p^2+1} = \frac{dx}{x} .$$

Με ολοκλήρωση έχουμε τη λύση:

$$\ln|p| - \frac{1}{2}\ln(p^2+1) + \ln|c_1| = \ln|x|$$

ή

$$c_1 p (p^2+1)^{-1/2} = x . \tag{4}$$

Λύνουμε την (4) ως προς p και έχουμε:

$$c_1^{\,2} p^2 = x^2 (p^2+1)$$

ή

$$p^2 = \frac{x^2}{c_1^{\,2} - x^2} . \tag{5}$$

Αφού $y' = p$, από την (5) παίρνουμε:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{c_1^{\,2} - x^2}$$

ή

$$dy = \pm \frac{xdx}{\sqrt{c_1^{\,2} - x^2}} ,$$

η οποία δίνει τις λύσεις:

$$y = \mp (c_1^{\,2} - x^2)^{1/2} + c_2$$

ή

$$x^2+\left(y-c_2\right)^2=c_1{}^2.$$

Β. Απουσία της ανεξάρτητης μεταβλητής

Έστω η μη γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$f\left(y,y',y''\right)=0, \tag{1}$$

στην οποία δεν υπάρχει η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Αν θέσουμε $p=y'$, τότε

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$$

και η (1) γίνεται:

$$f\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0, \tag{2}$$

από την οποία προσπαθούμε να βρούμε τη μεταβλητής p και στη συνέχεια την y.

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η μη γραμμική Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$yy''+\left(y'\right)^2+1=0. \tag{3}$$

<u>Λύση</u>: Θέτουμε $y'=p$, απ' όπου $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ και η (3) γίνεται

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2+1=0,$$

στην οποία μπορούμε να χωρίσουμε τις μεταβλητές, ήτοι

$$\frac{pdp}{p^2+1}+\frac{dy}{y}=0.$$

Με ολοκλήρωση έχουμε τη λύση:

$$\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)+\ln|y|=\ln|c_1|$$

ή

$$\left(p^2+1\right)^{1/2}=\frac{c_1}{y}$$

ή

$$p=\pm\frac{\sqrt{{c_1}^2-y^2}}{y}\,. \tag{5}$$

Από την (5) έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{{c_1}^2-y^2}}{y}$$

ή

$$\pm y\sqrt{{c_1}^2-y^2}dy=dx\,.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\mp\sqrt{{c_1}^2-y^2}+c_2=x$$

ή

$$\left(x-c_2\right)^2+y^2={c_1}^2\,.$$

6.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω μη γραμμικών Δ.Ε.

1. $x^2y''+\left(y'\right)^2-2xy'=0$, όταν $x=2,\ y=5,\ y'=2$.
2. $x^2y''+\left(y'\right)^2-2xy'=0$, όταν $x=2,\ y=5,\ y'=-4$.
3. $y''-x\left(y'\right)^3=0$.
4. $y^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$.
5. $\left(y+1\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$.
6. $2a\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3=0$.
7. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$.
8. $xy''-y'-x^5=0$, όταν $x=1,\ y=\dfrac{1}{2},\ y'=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο}

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7.1 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ορισμός: Μια *Μερική Διαφορική Εξίσωση* (Μ.Δ.Ε.) είναι μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση, δυο ή περισσοτέρων μεταβλητών και τις μερικές παραγώγους αυτής ως προς αυτές τις μεταβλητές.

Η *τάξη* μιας Μ.Δ.Ε. είναι αυτή της μεγαλύτερης τάξης της παραγώγου που περιέχει η εξίσωση. Για παράδειγμα, στις παρακάτω Μ.Δ.Ε., όπου η μεταβλητή z είναι η εξαρτημένη και οι x, y είναι οι ανεξάρτητες, δηλαδή, με άλλα λόγια, η z είναι η άγνωστη συνάρτηση των μεταβλητών x και y,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z, \tag{1}$$

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

είναι η μεν (1) πρώτης τάξης, η δε (2) δεύτερης τάξης.

Όπως και στις συνήθεις Δ.Ε., έτσι και στις Μ.Δ.Ε. έχουμε γραμμικές και μη γραμμικές τέτοιες εξισώσεις.

Η Μ.Δ.Ε. της μορφής:

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=G, \tag{3}$$

όπου οι $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ και G είναι συναρτήσεις των $x,\ y$.

Η Μ.Δ.Ε. (3) είναι *γραμμική δεύτερης τάξης*, όπου οι μεταβλητές x και y είναι οι ανεξάρτητες, ενώ η z είναι η εξαρτημένη. Οποιαδήποτε Μ.Δ.Ε. που δεν είναι της μορφής (3) είναι *μη γραμμική*.

Αν $G(x,y)=0$, τότε η Μ.Δ.Ε. (3) είναι *ομογενής*, ενώ σε αντίθετη περίπτωση είναι *μη ομογενής*.

Τέλος,

- αν $B^2 - 2AC \prec 0$, τότε η (3) ονομάζεται *ελλειπτική*,
- αν $B^2 - 2AC \succ 0$, τότε η (3) ονομάζεται *υπερβολική*,
- αν $B^2 - 2AC = 0$, τότε η (3) ονομάζεται *παραβολική*.

7.2 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΑΥΘΑΙΡΕΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Έστω ότι z είναι μια συνάρτηση των x και y που δίνεται από την

$$f\left(x, y, z, c_1, c_2\right) = 0, \tag{1}$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της (1) ως προς x και y έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) μπορούμε, όπως κάναμε και στην περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, να απαλείψουμε τις c_1 και c_2, έτσι ώστε να πάρουμε μια Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης της μορφής:

$$g\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{4}$$

<u>Παράδειγμα 1^{o}</u>: Να γίνει απαλοιφή των αυθαίρετων σταθερών c_1 και c_2 από τη σχέση

$$c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_1 c_2 = z. \tag{5}$$

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζουμε την (5) ως προς x και y για να πάρουμε:

$$2c_1 x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ή} \quad c_1 = \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}$$

και

$$2c_2 y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{ή} \quad c_2 = \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Από την (5), αντικαθιστώντας τις πιο πάνω σχέσεις για τις c_1 και c_2 έχουμε:

$$\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}x^2 + \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}y^2 + \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

ή

$$2\frac{\partial z}{\partial x}x^2 y + 2\frac{\partial z}{\partial y}xy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 4xyz.$$

<u>Παράδειγμα 2$^{\text{ο}}$</u>: Να γίνει απαλοιφή των αυθαίρετων σταθερών α, β και γ από τη σχέση:

$$\alpha x + \beta y + \gamma xy = z. \tag{6}$$

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζουμε την (6) ως προς x και y για να πάρουμε:

$$\alpha + \gamma y = \frac{\partial z}{\partial x} \tag{7}$$

και

$$\beta + \gamma x = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{8}$$

Τώρα παραγωγίζουμε την (7) ως προς x και παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \tag{9}$$

η οποία είναι δεύτερης τάξης.

Τώρα παραγωγίζουμε την (8) ως προς y και παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{10}$$

η οποία είναι επίσης δεύτερης τάξης.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (7) ως προς y ή τη (8) ως προς x και έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\gamma . \tag{11}$$

Λύνοντας την (7) ως προς α, την (8) ως προς β και αντικαθιστώντας τα, καθώς και το γ από την (11), στην δοθείσα σχέση (6), έχουμε:

$$z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}y\right)x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}x\right)y+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}xy$$

ή

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}x+\frac{\partial z}{\partial y}y-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}xy .$$

7.3 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΑΥΘΑΙΡΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω ότι οι συναρτήσεις $u=u(x,y,z)$ και $v=v(x,y,z)$ σχετίζονται μεταξύ τους από την

$$\varphi(u,v)=0 . \tag{1}$$

Θεωρώντας την z ως εξαρτημένη μεταβλητή και παραγωγίζοντας ως προς x και y παίρνουμε:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \tag{2}$$

και

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 . \tag{3}$$

Για να απαλείψουμε τις $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ από τις (2) και (3), αρκεί να θέσουμε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

και έτσι έχουμε:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

ή

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$

η οποία είναι μια Μ.Δ.Ε. γραμμική των $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, χωρίς την εμπλοκή της συνάρτησης $\varphi(u,v)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η Μ.Δ.Ε. από τη συνάρτηση:

$$\varphi\left(\frac{z}{x^3},\frac{y}{x}\right)=0. \qquad (5)$$

<u>Λύση</u>: Η συνάρτηση (1), $\varphi(u,v)=0$, δίνει $u=\dfrac{z}{x^3}$ και $v=\dfrac{y}{x}$.

Παραγωγίζοντας ως προς x και y παίρνουμε:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{3z}{x^4}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

και

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Τώρα η ορίζουσα (4), για την απαλοιφή των $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ είναι:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{3z}{x^4} & -\frac{y}{x^2} \\ \frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=0,$$

απ' όπου έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{3z}{x^4}\right)\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

ή

$$\frac{1}{x^4}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{3z}{x^5}+\frac{y}{x^5}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

ή

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z\,.$$

7.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παρακάτω Μ.Δ.Ε. να βρεθεί η τάξη, η εξαρτημένη και ανεξάρτητες μεταβλητές. Ποιες είναι γραμμικές και ποιες μη γραμμικές; Ποιες ομογενείς και ποιες μη ομογενείς;

α. $\frac{\partial u}{\partial x}=3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

β. $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2=1$.

γ. $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0$.

δ. $w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=xyz$.

ε. $t^2\frac{\partial^3 v}{\partial r^3}=r^3\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

στ. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial w}=xyw$.

2. Να ταξινομηθούν οι παρακάτω Μ.Δ.Ε. ως ελλειπτικές, υπερβολικές ή παραβολικές.

α. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0$

β. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-k^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=0$.

γ. $\dfrac{\partial v}{\partial t}-k\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}=0$. δ. $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+3y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$.

ε. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+5\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}+4z-2x+3y=0$.

3. Να απαλειφθούν οι c_1 και c_2 από τη σχέση: $\left(x^2+c_1\right)+\left(y^2+c_2\right)=z$.

4. Να απαλειφθεί η σταθερά α από τη σχέση: $z=\alpha\left(x+y\right)$.

5. Να βρεθεί η Μ.Δ.Ε. από τη συνάρτηση $\varphi\left(x+y+z,x^2+y^2-z^2\right)=0$.

7.5 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Μ. Δ. Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η γραμμικές Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης έχουν τη μορφή:

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=G, \qquad (1)$$

όπου οι $P,\ Q$ και G είναι συναρτήσεις των $x,\ y,\ z$, με τις δυο πρώτες ανεξάρτητες και την τρίτη εξαρτημένη.

Αν μια εκ των δυο συναρτήσεων $P=0$ ή $Q=0$, τότε η λύση της (1) βρίσκεται εύκολα. Για παράδειγμα η Μ.Δ.Ε.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4x+9y$$

έχει σαν λύση την

$$z=4xy+3y^2+\varphi(x),$$

όπου η φ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής x.

Η γενική λύση Μ.Δ.Ε. της μορφής (1) δίνεται από την αυθαίρετη συνάρτηση:

$$\varphi(u,v)=0, \qquad (2)$$

όπου $u = u(x, y, z) = c_1$ και $v = v(x, y, z) = c_2$, όπου οι c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και τουλάχιστον μια εκ των u, v περιέχει την εξαρτημένη μεταβλητή z.

Οι u, v είναι δυο ανεξάρτητες λύσεις ενός βοηθητικού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που ονομάζεται *σύστημα του Lagrange*, ο οποίος πρώτος το απέδειξε και είναι το ακόλουθο:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{3}$$

<u>**Παράδειγμα 1ο**</u>**:** Να βρεθεί η γενική λύση της Μ.Δ.Ε.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z. \tag{4}$$

<u>**Λύση**</u>**:** Η Μ.Δ.Ε. (4), όπως είδαμε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, προέκυψε από την αυθαίρετη συνάρτηση:

$$\varphi\left(\frac{z}{x^3}, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Έτσι, αυτό που πρέπει να δείξουμε εδώ είναι ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή ότι η γενική λύση της Μ.Δ.Ε. (4) είναι η παραπάνω αυθαίρετη συνάρτηση.

Το σύστημα του Lagrange για τη Μ.Δ.Ε. (4) είναι το

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z}.$$

Από την εξίσωση:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{3z}$$

έχουμε

$$\ln|x| = \frac{1}{3}\ln|z| + \ln c_1$$

ή

$$\frac{z}{x^3} = c_1 = u.$$

ομοίως, από την εξίσωση:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

έχουμε ότι

$$\frac{y}{x} = c_2 = v\,.$$

Άρα η γενική λύση της Μ.Δ.Ε. (4) δίνεται από την αυθαίρετη συνάρτηση:

$$\varphi\left(\frac{z}{x^3}, \frac{y}{x}\right) = 0\,.$$

<u>Παράδειγμα 2^{o}</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της Μ.Δ.Ε.

$$3\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} - 1 = 0\,. \qquad (5)$$

<u>Λύση</u>: Το σύστημα του Lagrange για τη Μ.Δ.Ε. (5) είναι το

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = dz\,.$$

Από την εξίσωση:

$$\frac{dx}{2} = dz$$

έχουμε

$$2z - x = c_1 = u$$

και από την εξίσωση:

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3}$$

έχουμε

$$2y - 3x = c_2 = v\,.$$

Άρα η γενική λύση της Μ.Δ.Ε. (5) δίνεται από την αυθαίρετη συνάρτηση:

$$\varphi\left(2z - x, 2y - 3x\right) = 0\,.$$

7.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Μ.Δ.Ε.

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

2. $3\dfrac{\partial z}{\partial t}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}=4$.

3. $x^2u\dfrac{\partial u}{\partial t}-t^2u\dfrac{\partial u}{\partial x}=t^2x$.

4. $\left(t^2-s^2-r^2\right)\dfrac{\partial r}{\partial t}+2ts\dfrac{\partial r}{\partial s}=2tr$.

5. $2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u$.

6. $2\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}+5z=0$.

7.7 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Μ. Δ. Ε. ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Για γραμμικές Μ.Δ.Ε. οποιασδήποτε τάξης ισχύουν τα ακόλουθα:

Α. Αν $z_1,\ z_1,\ldots,\ z_n$ είναι λύσεις μιας γραμμικής ομογενούς Μ.Δ.Ε., τότε η σχέση:

$$c_1z_1+c_2z_1+\cdots+c_nz_n, \tag{1}$$

όπου $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ είναι σταθερές, είναι επίσης λύση αυτής.

Β. Η γενική λύση μιας γραμμικής μη ομογενούς Μ.Δ.Ε. αποτελείται από το άθροισμα μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης συν τη γενική λύση αυτής.

Γ. Αν οι συντελεστές $A,\ B,\ C,\ldots,\ F$ της Μ.Δ.Ε.

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=G. \tag{2}$$

είναι σταθερές, τότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (2) βρίσκεται αν υποθέσουμε ότι

$$z(x,y)=e^{ax+by}, \tag{3}$$

όπου $a,\ b$ είναι σταθερές που πρέπει να υπολογίσουμε.

Δ. Η γενική λύση μιας ομογενούς Μ.Δ.Ε. n τάξης περιέχει n το πλήθος αυθαίρετες σταθερές.

<u>Παράδειγμα 1^ο</u>: Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$z(x,y) = e^{-8y}\sin 2x \tag{4}$$

είναι μια λύση της Μ.Δ.Ε.

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$z(0,y) = z(\pi,y) = 0,\ z(x,0) = \sin 2x. \tag{6}$$

<u>Σημείωση</u>: Μ.Δ.Ε. όπως είναι η δοθείσα εξίσωση (5) με συνθήκες όπως αυτές της σχέσης (6), ονομάζονται ***Προβλήματα Συνοριακών Τιμών***.

<u>Λύση</u>: Από τη σχέση (4) έχουμε ότι

$$z(0,y) = e^{-8y} = \sin 0 = 0,\quad z(\pi,y) = e^{-8y}\sin 2\pi = 0$$

και

$$z(x,0) = e^{-0}\sin 2x = \sin 2x.$$

Άρα, η δεδομένη ως λύση του προβλήματος, σχέση (4), ικανοποιεί τις συνοριακές τιμές.

Τώρα παραγωγίζοντας την (4) μερικώς ως προς x (δυο φορές) και y έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{-8y}\cos 2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4e^{-8y}\sin 2x$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -8e^{-8y}\sin 2x.$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα Μ.Δ.Ε. (5) παίρνουμε ότι:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow\ 2\left(-4e^{-8y}\sin 2x\right) - \left(-8e^{-8y}\sin 2x\right) = 0.$$

Συνεπώς η συνάρτηση (4) είναι μια λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (5), (6).

<u>Παράδειγμα 2ο</u>: Να δειχθεί ότι η σχέση

$$f(x,y)=g(2x+5y)+q(2x-5y) \tag{7}$$

είναι η γενική λύση της Μ.Δ.Ε.

$$25f_{xx}(x,y)-4f_{yy}(x,y)=0 \tag{8}$$

και να βρεθεί μια ειδική λύση της (8) που να ικανοποιεί τις συνοριακές τιμές

$$f(0,y)=f(\pi,y)=0,\ f(x,0)=\sin 2x \quad \text{και} \quad f_y(x,0)=0\,. \tag{9}$$

<u>Λύση</u>: Θέτουμε $u=2x+5y,\ \ v=2x-5y$, οπότε

$$f(x,y)=g(u)+q(v)\,. \tag{10}$$

Παραγωγίζοντας (δυο φορές) μερικώς ως προς x και y την (10) έχουμε:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=2g'(u)+2q'(v)\,, \tag{11}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[2g'(u)+2q'(v)\right]=2\frac{\partial g'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial q'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

ή

$$f_{xx}(x,y)=4g''(u)+4q''(v)\,, \tag{12}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=5g'(u)-5q'(v)\,, \tag{13}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[5g'(u)-5q'(v)\right]=5\frac{\partial g'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-5\frac{\partial q'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

ή

$$f_{yy}(x,y)=25g''(u)+25q''(v)\,. \tag{14}$$

Είναι προφανές ότι οι σχέσεις (12) και (14) ικανοποιούν τη Μ.Δ.Ε. (8), δηλαδή η σχέση (7) ικανοποιεί τη δοθείσα εξίσωση 2ης τάξης, και, αφού αυτή περιέχει δυο αυθαίρετες συναρτήσεις, είναι η γενική λύση της Μ.Δ.Ε. (8).

Τώρα από την (7) έχουμε:

$$f(x,0) = g(2x) + q(2x) = \sin 2x . \qquad (15)$$

Παραγωγίζοντας την (15) ως προς x παίρνουμε:

$$g'(2x) + q'(2x) = \cos 2x . \qquad (16)$$

Ακόμη,

$$f_y(x,0) = 5g'(2x) - 5q'(2x) = 0$$

ή

$$g'(2x) = q'(2x) . \qquad (17)$$

Από τις (16) και (17) έχουμε:

$$g'(2x) = q'(2x) = \frac{\cos 2x}{2},$$

την οποία αν ολοκληρώσουμε παίρνουμε:

$$g(2x) = \frac{\sin 2x}{2} + c_1, \;\; q(2x) = \frac{\sin 2x}{2} + c_2 .$$

Άρα

$$f(x,y) = \frac{\sin(2x+5y)}{2} + \frac{\sin(2x-5y)}{2} + c_1 + c_2$$

και αφού $f(0,y) = f(\pi,y) = 0$ έχουμε:

$$\frac{\sin(5y)}{2} + \frac{\sin(-5y)}{2} + c_1 + c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 0 .$$

Συνεπώς η ζητούμενη ειδική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (8), (9) είναι η

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\sin(2x+5y)+\sin(2x-5y)\right]=\sin 2x\cos 5x\,.$$

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια, όπου η γενική λύση μιας Μ.Δ.Ε. βρίσκεται με τη χρήση μεθόδων των συνήθων Δ.Ε.

7.8 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μια από τις πλέον γνωστές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων Μ.Δ.Ε. με συνοριακές τιμές, είναι η **Μέθοδος διαχωρισμού των μεταβλητών**, όπου υποθέτουμε ότι μια λύση της δοθείσας εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο άγνωστων συναρτήσεων, κάθε μια εκ των οποίων εξαρτάται από μια μόνον ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι το πρόβλημα εύρεσης λύσης της Μ.Δ.Ε. ανάγεται σε πρόβλημα επίλυσης μιας συνήθους Δ.Ε.

Παράδειγμα 1^{o}: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\;\; z(0,y)=4e^{-2y}\,. \tag{1}$$

Λύση: Έστω ότι η λύση δίνεται από τη συνάρτηση:

$$z(x,y)=X(x)Y(y)\,,$$

τότε

$$X'Y-2XY'=0\;\Rightarrow\;\frac{X'}{2X}=\frac{Y'}{Y}\,. \tag{2}$$

Αφού οι συναρτήσεις X και Y εξαρτώνται, η μεν πρώτη μόνο από τη x, η δε δεύτερη μόνο από τη y, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, κάθε μόλος της (2) πρέπει να ισούται με μια σταθερά ποσότητα. Δηλαδή έχουμε

$$\frac{X'}{2X}=c\;\Rightarrow X'-2cX=0$$

και

$$\frac{Y'}{Y}=c\;\Rightarrow Y'-cY=0\,.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται εύκολα και δίνουν τις λύσεις:

$$X = Ae^{2cx} \quad \text{και} \quad Y = Be^{cy}.$$

Άρα μια λύση της Μ.Δ.Ε. του προβλήματος (1) είναι η ακόλουθη:

$$z(x,y) = Ae^{2cx}Be^{cy} = ABe^{c(2x+y)}.$$

Από τη συνοριακή τιμή $z(0,y) = 4e^{-2y}$ έχουμε ότι

$$ABe^{cy} = 4e^{-2y},$$

δηλαδή

$$AB = 4 \quad \text{και} \quad c = -2.$$

Συνεπώς η ζητούμενη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (1) είναι:

$$z(x,y) = 4e^{-4x-2y}.$$

<u>Παράδειγμα 2°</u>: Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 \prec x \prec 3, \; t \succ 0, \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0, \; t \succ 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = 5\sin 4\pi x + 3\sin 8\pi x - 2\sin 12\pi x, \; 0 \prec x \prec 3 \tag{5}$$

και $|u(x,t)| \prec M$, δηλαδή η συνάρτηση u είναι φραγμένη για $0 \prec x \prec 3$.

<u>Λύση</u>: Έστω ότι η λύση δίνεται από τη συνάρτηση:

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

τότε

$$XT' = 2X''T$$

απ' όπου, διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έχουμε:

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \tag{6}$$

όπου η επιλογή της σταθεράς $-\lambda^2$ γίνεται ώστε η λύση που θα προκύψει να ικανοποιεί τη συνθήκη $|u(x,t)| \prec M$, για πραγματικές τιμές της λ, κάτι που δεν θα ίσχυε αν επιλέγαμε λ^2.

Από την (6) παίρνουμε:

$$T' + 2\lambda^2 T = 0,$$

η οποία έχει λύση την

$$T(t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t}$$

και

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

η οποία έχει λύση την

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x + c_3 \cos \lambda x.$$

Άρα μια λύση της Μ.Δ.Ε. (3) είναι:

$$u(x,t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t} \left(c_2 \sin \lambda x + c_3 \cos \lambda x \right)$$

ή, ενσωματώνοντας τη σταθερά c_1 στις c_2 και c_3, έχουμε:

$$u(x,t) = e^{-2\lambda^2 t} (\alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x). \tag{7}$$

Από συνθήκη $u(0,t) = 0$, η (7) δίνει:

$$u(0,t) = \beta e^{-2\lambda^2 t} = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0$$

και έτσι

$$u(x,t) = \alpha e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x. \tag{8}$$

Από συνθήκη $u(3,t) = 0$, η (8) δίνει:

$$\alpha e^{-2\lambda^2 t} \sin 3\lambda = 0,$$

στην οποία αν η σταθερά $\alpha = 0$, τότε η (8) είναι η μηδενική λύση. Για το λόγο αυτό πρέπει να έχουμε:

$$\sin 3\lambda = 0,$$

δηλαδή $3\lambda = k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Άρα και η

$$u(x,t) = \alpha e^{-2k^2\pi^2 t/9} \sin\frac{k\pi x}{3}, \tag{9}$$

είναι μια λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3), (4).

Για να κάνουμε χρήση και της συνθήκης (5), παίρνουμε ως λύση το άθροισμα τριών λύσεων που προκύπτουν από την (9), για τρεις σταθερές $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ και τρεις τιμές του k. Δηλαδή έχουμε τη λύση:

$$u(x,t) = \alpha_1 e^{-2k_1^2\pi^2 t/9} \sin\frac{k_1\pi x}{3} + \alpha_2 e^{-2k_2^2\pi^2 t/9} \sin\frac{k_2\pi x}{3} + \alpha_3 e^{-2k_3^2\pi^2 t/9} \sin\frac{k_3\pi x}{3}. \tag{10}$$

Τώρα από τη λύση (10) και τη συνθήκη (5) έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \alpha_1 \sin\frac{k_1\pi x}{3} + \alpha_2 \sin\frac{k_2\pi x}{3} + \alpha_3 \sin\frac{k_3\pi x}{3} \\ &= 5\sin 4\pi x + 3\sin 8\pi x - 2\sin 12\pi x, \end{aligned}$$

που ισχύει τότε και μόνον τότε, όταν $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -2$, $k_1 = 12$, $k_2 = 24$ και $k_3 = 36$.

Συνεπώς η ζητούμενη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3), (4) και (5) είναι:

$$u(x,t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x + 3e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x - 2e^{-288\pi^2 t} \sin 12\pi x .$$

7.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Μ.Δ.Ε.

   α. $2f_{xx} + 3f_y - 2f = 0$.   β. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0$.

γ. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

δ. $\dfrac{\partial z}{\partial t}+2\dfrac{\partial z}{\partial s}=3z$.

ε. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

στ. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών.

α. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4\dfrac{\partial z}{\partial y},\ z(0,y)=8e^{-3y}$.

β. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-4\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(0,y)=8e^{-3y}+4e^{-3y}$.

γ. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\prec x\prec 3,\ t\succ 0,\ u(0,t)=u(3,t)=0,\ t\succ 0,$

$u(x,0)=3\sin 2\pi x-2\sin 4\pi x+\sin 8\pi x,\ 0\prec x\prec 3,\ \left|u(x,t)\right|\prec M$.

δ. $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z(x,0)=4e^{-x}$.

ε. $\dfrac{\partial z}{\partial t}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-z=0,\ z(t,0)=3e^{-5t}+2e^{-3t}$.

στ. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z_x(0,y)=z(2,y)=0,\ z(x,0)=8\cos\dfrac{3\pi x}{4}-6\cos\dfrac{9\pi x}{4}$.

ΧΡΗΣΙΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

- **Μορφές που περιέχουν** $(a+bu)$

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{a+bu} = \dfrac{1}{b} ln|a+bu| + C.$

3. $\int \dfrac{udu}{a+bu} = \dfrac{u}{b} - \dfrac{a}{b^2} ln|a+bu| + C.$

4. $\int \dfrac{u^2du}{a+bu} = \dfrac{u^2}{2b} - \dfrac{au}{b^2} ln|a+bu| + C.$

5. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)} = \dfrac{1}{a} ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)} = -\dfrac{1}{au} + \dfrac{b}{a^2} ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\int \dfrac{udu}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left(ln|a+bu| + \dfrac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\int \dfrac{u^2du}{(a+bu)^2} = \dfrac{u}{b^2} - \dfrac{a^2}{b^3(a+bu)} - \dfrac{2a}{b^3} ln|a+bu| + C.$

9. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)^2} = \dfrac{1}{a(a+bu)} + \dfrac{1}{a^2} ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\dfrac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \dfrac{2b}{a^3} ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak} + ln\left|\dfrac{a+bu}{c+ku}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{udu}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak}\left[\dfrac{c}{k} ln|c+ku| - \dfrac{a}{b} ln|a+bu|\right] + C.$

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a+bu}$

13. $\int u\sqrt{a+bu}du=\frac{2(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}}{15b^2}+C$.

14. $\int u^2\sqrt{a+bu}du=\frac{2\left(8a^2-12abu+15b^2u^2\right)(a+bu)^{3/2}}{105b^3}+C$.

15. $\int\frac{udu}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2}+C$.

16. $\int\frac{u^2du}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2\left(3b^2u^2-4abu+8a^2\right)\sqrt{a+bu}}{15b^3}+C$.

17. $\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C,\ a\succ 0$.

18. $\int\frac{\sqrt{a+bu}du}{u}=2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a^2-u^2}$

19. $\int\frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}=\frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$.

20. $\int\frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+C$.

21. $\int\frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}+C$.

22. $\int\frac{\sqrt{a^2-u^2}du}{u}=\sqrt{a^2-u^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right|+C,\ a\succ 0$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C.$

24. $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

25. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C.$

26. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

28. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C.$

29. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C.$

30. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\mp\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C.$

31. $\int \left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2} du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm 5a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

32. $\int \frac{du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$

33. $\int \frac{u^2\,du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

- **Μορφές που περιέχουν** $\left(a^2-u^2\right)$ και $\left(u^2-a^2\right)$

34. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$.

35. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

- **Εκθετικές και λογαριθμικές μορφές**

36. $\int e^u du = e^u + C$.

37. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a \succ 0,\ a \neq 1$.

38. $\int u e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(au-1) + C$.

39. $\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au} du$.

40. $\int \frac{e^{au} du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{au} du}{u^{n-1}}$.

41. $\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$.

42. $\int \ln u du = u\ln u - u + C$.

43. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\ n \neq -1.$

44. $\int u^n \ln^m u du = \frac{u^{n+1}\ln^m u}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int u^n \ln^{m-1} u du,\ m,n \neq -1.$

45. $\int \frac{du}{u\ln u} = \ln\left|\ln u\right| + C.$

46. $\int \frac{du}{a+be^{cu}} = \frac{1}{ac}\left(cu - \ln\left|a+be^{cu}\right|\right) + C.$

- **Διάφορες μορφές**

47. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+u}+\sqrt{b+u}\right) + C.$

48. $\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C.$

49. $\int \sqrt{a+bu+cu^2}du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} -$

$$-\frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}}\ln\left|2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right| + C,\ c \succ 0.$$

50. $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$

51. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$

52. $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

53. $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

54. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

55. $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\tan x + C$.

56. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = Arc\sec x + C$.

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = Arc\sin\frac{x}{2} + C$.

58. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}Arc\tan\frac{x}{3} + C$.

59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}Arc\cos\frac{1}{x^2} + C$.

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

61. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6}Arc\tan\frac{2x}{3} + C$.

62. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

63. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

64. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

65. $\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$.

66. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$.

67. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

68. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$.

69. $\int x\cos x dx = -x\sin x + \cos x + C$.

70. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

71. $\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$.

72. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$.

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = Arc\sin\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

74. $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} Arc\tan\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

75. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = Arc\sin e^x + C$.

76. $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^{4x}} = \frac{1}{2} Arc\tan e^{2x} + C$.

77. $\int Arc\tan x dx = xArc\tan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$.

78. $\int Arc\cos 2x dx = xArc\cos 2x - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$.

79. $\int xArc\tan x dx = \frac{\left(x^2+1\right)}{2} Arc\tan x - \frac{x}{2} + C$.

80. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

81. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

82. $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

83. $\int \sqrt{4-x^2} dx = 2Arc\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$.

84. $\int \sin^3 x dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \sin^2 x\cos x + C$.

85. $\int x^3\sin x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$.

86. $\int \sin x\sin 3x dx = \frac{1}{8}\sin 3x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos 3x + C$.

87. $\int e^{2x}\cos 3x dx = Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x + C$.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. Αθανασιάδης, Α.Γ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδ. Διόσκουροι, 1997.

2. Δάσιος, Γ., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πάτρα, 1983.

3. Κυβεντίδης, Θ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμος ΙΙΙ, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1991.

4. Κυβεντίδης, Θ., *Διαφορικές Εξισώσεις – Λυμένα Προβλήματα*, Τόμος Ι, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1993.

5. Μανατάκης, Μ., *Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές*, Εκδ. Συμμετρία, Πάτρα,1993.

6. Μπούντης, Α., *Μη Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδ. Γ. Πνευματικός, Αθήνα,1996.

7. Ντίνος, Α.Α., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδ. Συμεών, Αθήνα, 1988.

8. Σιαφαρίκας, Π., *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*, Τόμος Ι, Πάτρα, 1997.

9. Σπανδάγου, Β., *Διαφορικές Εξισώσεις Ι*, Εκδ. Αίθρια, Αθήνα, 1990.

10. Χατζηνικολάου, Κ.Θ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1989.

11. Abell, M.L. and Braselton, J.P., *Modern Differential Equations: Theory, Applications Technology*, Saunders College Publishing, Harcourt Brace College Publishers,1995.

12. Ayres, F. JR., *Differential Equations*, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill Book Company, 1972.

13. Boyce, W.E. and DiPrima, R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Inc., Sixth Edition, 1997.

14. Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall of India Private Limited, 1992.

15. Miller, R., *Introduction to Differential Equations*, Second Edition, Prentice-Hall Inc., 1991.

16. Redheffer, R., *Introduction to Differential Equations*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.

17. Rice, B.J. and Strange, J.D., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, Third Edition, 1993.

18. Spiegel, M.R., *Applied Differential Equations*, Prentice-Hall Inc., Third Edition, 1981.

19. Spiegel, M.R., *Advanced Mathematics: for Engineers and Scientists*, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill Book Company, 1971.

20. Zill, D., *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, Sixth Edition, 1997.