# ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

# ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

M.Sc. PROGRAM

"ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ"

*Ι. ΚΟΥΓΙΑΣ*
*ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ*

ΑΝΤΙΡΡΙΟ 2013-2014

**<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{o}$</u>**

**ΠΙΝΑΚΕΣ**

**1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ**
**1.2 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**
**1.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ**
**1.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**
**1.5 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΠΙΝΑΚΑ**
**1.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ**
**1.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**
**1.8 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ**
**1.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{o}$</u>**

**ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

**2.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΥΠΟ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ**
**2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΑΠΑΛΟΙΦΩΝ ΤΟΥ GAUSS**
**2.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER**
**2.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΙΝΑΚΑ**
**2.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{o}$</u>**

**ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ**

**3.1 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ**
**3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ**
**3.3 ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ**
**3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ**
**3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{o}$</u>**

**ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ**

**4.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$**
**4.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ ΕΠΙ ΕΝΑΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ**
**4.3 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**

**4.4 ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$**
**4.5 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**
**4.6 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{C}^n$**
**4.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**
**4.8 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ**
**4.9 ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ**
**4.10 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**
**4.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{o}$

# ΠΙΝΑΚΕΣ

## 1.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Ονομάζουμε πίνακα (matrix –matrices) των ποσοτήτων $a_{ij}$, $i=1,2,...,m$ και $j=1,2,...,n$, μια ορθογώνια παράθεση αυτών σε $m$ γραμμές (rows) και $n$ στήλες (columns) ως ακολούθως:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ή $A=\left(a_{ij}\right)$, $i=1,2,...,m,$ $j=1,2,...,n$.

Ο πιο πάνω πίνακας ονομάζεται πίνακας τάξης (dimension) $m\times n$. Τα δε $a_{ij}$ ονομάζονται **στοιχεία (elements)** του πίνακα και είναι πραγματικοί αριθμοί. Για $i=1,2,...,m$ η διάταξη $b_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ ονομάζεται **γραμμή** του πίνακα και για $j=1,2,...,n$ η διάταξη $c_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ ονομάζεται **στήλη** του πίνακα.

Αν τώρα ένας πίνακας, έχει μια μόνο γραμμή και $n$ στήλες, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **πίνακα γραμμή.** Για παράδειγμα ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

είναι ένας πίνακας γραμμή.

Στην περίπτωση που ένας πίνακας έχει μόνο μια στήλη και $m$ γραμμές, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **πίνακα στήλη.** Για παράδειγμα ο πίνακας:

$$B=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},$$

είναι πίνακας στήλη.

Δυο πίνακες, $A=(a_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$ θα λέγονται **ίσοι (equal)** αν και μόνον αν είναι της ίδιας τάξης και έχουν $a_{ij}=\beta_{ij}$ για κάθε ζευγάρι $(i,j)$.

**Αντίθετος (opposite)** πίνακας ενός πίνακα $A=(a_{ij})$ είναι ο $-A=(-a_{ij})$.

**Ανάστροφος (transpose)** πίνακας ενός πίνακα $A=(a_{ij})$ ονομάζεται ο πίνακας $B=(\beta_{ij})$, όπου $\beta_{ij}=a_{ji}$. Δηλαδή, ο πίνακας με στήλες τις γραμμές του $A$ και συμβολίζεται με $A^t$. Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix},\ \text{τότε}\ A^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}.$$

Ένας πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός (square matrix)** αν $m=n$, δηλαδή αν έχει τόσες γραμμές όσες και στήλες. Σε γενική μορφή ένας τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως εξής:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}.$$

Η διαγώνιος $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ ...,\ a_{mm}$ ονομάζεται **κύρια ή πρωτεύουσα (main diagonal)** διαγώνιος.

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{mm}$ ονομάζεται **ίχνος (trace)** του πίνακα και συμβολίζεται με $Tr(A)$.

Παράδειγμα, για τον πίνακα: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, έχουμε $Tr(A)=1+5+9=15$.

**Διαγώνιος (diagonal matrix)** πίνακας ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει μόνο τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου διάφορα του μηδενός. Για παράδειγμα ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$ είναι ένας $4\times 4$ διαγώνιος πίνακας.

**Μηδενικός** πίνακας είναι ο πίνακας οποιασδήποτε τάξης που τα στοιχεία του είναι <u>όλα</u> μηδέν.

**Μοναδιαίος (identity matrix)** πίνακας ονομάζεται ο διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με τη μονάδα. και συμβολίζεται με $I_m$ (ή απλά $I$).

Δηλαδή, $I_1=[1]$, $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ κ.λ.π.

Αν $A$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $m\times m$, τότε: $I\cdot A=A\cdot I=A$ και ακόμη $I=I^2=I^3=\cdots=I^k$, όπου $k$ ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Ένας τετραγωνικός πίνακας θα λέγεται **τριγωνικός άνω (upper triangular) (ή κάτω) (lower triangular)** αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω (ή πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

<u>Παραδείγματα</u>:

Τριγωνικοί άνω: $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 6 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \delta \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Τριγωνικοί κάτω: $\Gamma=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \\ v & n & 3 \end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ s & 8 & 3 & 0 \\ t & 5 & n & 9 \end{bmatrix}$

**Συμμετρικός (symmetric)** ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, όταν τα στοιχεία του που είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιό του είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$.

<u>Παράδειγμα</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Αντισυμμετρικός (anti-symmetric)** ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας, όταν τα στοιχεία του που είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιό του είναι αντίθετα μεταξύ τους και τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι όλα μηδέν, δηλαδή $a_{ij} = -a_{ji}$ και $a_{ij} = 0$, όταν $i = j$.

<u>Παράδειγμα</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2-1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ x^2-4x & 5 \end{bmatrix}$, να βρεθούν οι τιμές του $x$ για τις οποίες $A = B$.

**<u>Λύση</u>:** Για να είναι ίσοι οι δυο πίνακες, θα πρέπει όλα τους τα στοιχεία να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή

$$x^2 - 1 = 8 \quad \ldots\ldots..(1)$$
$$x^2 - 4x = -3 \quad \ldots.(2).$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε ότι: $x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = \pm 3$.

Ακόμη, από την εξίσωση (2) έχουμε ότι: $x^2 - 4x = -3 \;\Rightarrow\; x = 1$ ή $x = 3$.

Οι εξισώσεις (1) και (2) πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα, δηλαδή θα πρέπει $x = 3$.

2. Να βρεθεί ο τετραγωνικός πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)$, αν γνωρίζουμε ότι έχει διάσταση 4 και $a_{ij} = 0$ όταν $i \prec j$ και $a_{ij} = 1$ όταν $i \geq j$.

**<u>Λύση</u>:** Το ότι $a_{ij} = 0$ όταν $i \prec j$ σημαίνει ότι ο πίνακας $A$ είναι τριγωνικός κάτω. Επίσης, $a_{ij} = 1$ όταν $i \geq j$, σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου και κάτω από αυτήν είναι ίσα με τη μονάδα. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 1.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

### α. Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων

Έστω δυο πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (\beta_{ij})$ τάξης $m \times n$ και οι δυο με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το άθροισμά τους είναι ο πίνακας $\Gamma = (\gamma_{ij})$ με στοιχεία $\gamma_{ij} = a_{ij} + \beta_{ij}$ .

Για παράδειγμα αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, τότε το άθροισμα (sum)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+1 \\ 5+1 & -1+0 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η αφαίρεση (subtraction) πινάκων είναι η πρόσθεση του αντίθετου, δηλαδή $A - B = A + (-B)$.

Προφανώς ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες:

(i) $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα) (commutative law).

(ii) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$ (προσεταιριστική ιδιότητα) (associative law).

(iii) $A + (-A) = 0$, όπου $0$ είναι ο μηδενικός πίνακας (inverse law).

**β. Εξωτερικός πολλαπλασιασμός (scalar multiplication)**

Έστω $\lambda$ πραγματικός αριθμός και $A=\left(a_{ij}\right)$ ένα πίνακας, τότε ο $\lambda \cdot A$ είναι πίνακας ίδιας τάξης με τον $A$ και έχει στοιχεία τα $\left(\lambda a_{ij}\right)$, δηλαδή αν π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda = 2, \quad \text{τότε} \quad \lambda \cdot A=\begin{bmatrix} 1\cdot 2 & 2\cdot 2 & -1\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 4\cdot 2 & 0\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda \cdot A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(\beta_{ij}\right)$ και $k,\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(i) $\lambda \cdot \left(A+B\right)=\lambda \cdot A+\lambda \cdot B$ (distributive law).

(ii) $\left(k+\lambda\right)\cdot A=k\cdot A+\lambda \cdot A$ (distributive law).

(iii) $\left(k\cdot \lambda\right)\cdot A=k\left(\lambda \cdot A\right)$ (associative law).

(iv) $I\cdot A=A\cdot I=A$ (identity law).

**γ. Πολλαπλασιασμός Πινάκων (matrix multiplication)**

Αν $A=\left(a_{ij}\right)$ και $B=\left(\beta_{ij}\right)$ είναι πίνακες τάξης $m\times p$ και $p\times n$ αντίστοιχα, ονομάζουμε γινόμενο αυτών τον πίνακα τάξης $m\times n$, $\Gamma=\left(\gamma_{ij}\right)$, όπου $\gamma_{ij}=a_{i1}\cdot \beta_{1j}+a_{i2}\cdot \beta_{2j}+\cdots+a_{ip}\cdot \beta_{pj}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot \beta_{kj}$ και γράφουμε $A\cdot B=\Gamma$.

Σχηματικά είναι: $\underset{(m\times p)}{A} \cdot \underset{(p\times n)}{B} = \underset{(m\times n)}{A\cdot B}$.

Παράδειγμα, έστω $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, τότε

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 0+0\cdot 3 & 2\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ -3\cdot 1+4\cdot 2 & -3\cdot 0+4\cdot 3 & (-3)\cdot(-1)+4\cdot 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 12 & 3 \end{bmatrix}.$$

**<u>Παρατηρήσεις</u>:**

1. Αν $A$ και $B$ είναι πίνακες $m\times n$ και $k\times p$ αντίστοιχα, τότε το γινόμενο $A\cdot B$ ορίζεται αν και μόνον αν $n=k$, δηλαδή ο αριθμός των στηλών του πίνακα $A$ είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα $B$.

2. Αν $A, B$ και $\Gamma$ είναι πίνακες $m\times n$, $n\times k$ και $k\times p$ αντίστοιχα, τότε ορίζεται το γινόμενο $(A\cdot B)\cdot\Gamma$

3. Προφανώς, $A\cdot B$ δεν είναι πάντα ίσο με $B\cdot A$, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι εν γένει πράξη αντιμεταθετική.

   Παράδειγμα αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, τότε έχουμε

   $$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+6 & 0+21 \\ 1+8 & 0+28 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 9 & 28 \end{bmatrix}.$$

   Επίσης

   $$B\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 4 \\ 2\cdot 2+7\cdot 1 & 2\cdot 3+7\cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 34 \end{bmatrix}$$

   και προφανώς,

   $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Να σημειώσουμε εδώ ότι πολλές φορές μπορεί να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός $A\cdot B$ δυο πινάκων $A$ και $B$ και να μην ορίζεται ο πολλαπλασιασμός $B\cdot A$.

4. Αν $A$ είναι $m\times m$ πίνακας, τότε ορίζεται το γινόμενο $A\cdot A$ και γράφουμε $A\cdot A=A^2$.

   Γενικά είναι $A^k=A^{k-1}\cdot A$.

5. Αν $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(\beta_{ij}\right), \quad \Gamma=\left(\gamma_{ij}\right)$ είναι πίνακες τάξης $m\times n$, $n\times k$, $k\times p$ αντίστοιχα, τότε: $\left(A\cdot B\right)\cdot \Gamma = A\cdot\left(B\cdot \Gamma\right)$, δηλαδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

6. Αν $A\cdot B=0$, δεν σημαίνει οπωσδήποτε ότι $A=0$ ή $B=0$.

Παράδειγμα αν $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\neq 0$ και $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\neq 0$, τότε

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

7. Στους τετραγωνικούς πίνακες έχουμε:

(i) Ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη προσεταιριστική (associative), δηλαδή $\left(A\cdot B\right)\cdot \Gamma = A\cdot\left(B\cdot \Gamma\right)$.

(ii) Επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση, δηλαδή $A\cdot\left(B+\Gamma\right)=A\cdot B+A\cdot \Gamma$ και $\left(B+\Gamma\right)\cdot A=B\cdot A+\Gamma\cdot A$.

(iii) Υπάρχει ο μοναδιαίος πίνακας $I$ (identity matrix) έτσι ώστε να είναι: $A\cdot I=I\cdot A=A$.

(iv) Αν για ένα πίνακα $A$ $\left(m\times m\right)$, υπάρχει ένας πίνακας $A^{-1}$ $\left(m\times m\right)$ τέτοιος ώστε:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I, \qquad (*)$$

τότε ο $A^{-1}$ ονομάζεται **αντίστροφος (inverse matrix)** πίνακας του πίνακα $A$, λέμε δε ότι ο $A$ είναι αντιστρέψιμος. Από την (*) έπεται ότι και ο $A$ είναι αντίστροφος του $A^{-1}$, δηλαδή $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

Έτσι όταν δυο πίνακες ικανοποιούν τη σχέση (*) λέγονται αντίστροφοι.

Αν για τον $A$ υπάρχει ο $A^{-1}$, τότε αυτός είναι μοναδικός (unique).

Πράγματι: Αν $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ και $A\cdot B=B\cdot A=I$, τότε: $B=B\cdot I=B\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)=\left(B\cdot A\right)\cdot A^{-1}=I\cdot A^{-1}=A^{-1}$.

(v) Για το γινόμενο οσονδήποτε ανάστροφων (transpose) πινάκων, π.χ. τριών, ισχύει: $(A\cdot B\cdot \Gamma)^t = \Gamma^t \cdot B^t \cdot A^t$, δηλαδή ο ανάστροφος του γινομένου ισούται με το γινόμενο των ανάστροφων, αλλά με αντεστραμμένη φορά παράταξης των παραγόντων.

Παράδειγμα: Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$, $A^t=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ και

$B^t=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}$, τότε $A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 5+3\cdot 2\\ 5\cdot 5+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\ 29\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A\cdot B)^t=\begin{bmatrix}11 & 29\end{bmatrix}$.

Επίσης

$$B^t\cdot A^t=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 1+2\cdot 3 & 5\cdot 5+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 29\end{bmatrix}.$$

## 1.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 1\end{bmatrix}$, να υπολογιστούν τα γινόμενα $A\cdot B$ και $B\cdot A$

**<u>Λύση</u>:** Ο $A$ είναι ένας $(1\times 3)$ πίνακας και ο $B$ είναι ένας $(3\times 1)$, άρα ορίζεται το γινόμενο $A\cdot B$ και είναι ένας $(1\times 1)$ πίνακας.

Έτσι έχουμε:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 4+3\cdot 5+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\end{bmatrix}.$$

Τώρα ο $B$ είναι ένας $(3\times 1)$ και ο $A$ είναι ένας $(1\times 3)$ πίνακας, άρα ορίζεται το γινόμενο $B\cdot A$ και είναι ένας $(3\times 3)$ πίνακας. Έτσι έχουμε:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 3 & 4\cdot 1 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 3 & 5\cdot 1 \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 10 & 15 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ να υπολογιστεί ο $A^2$.

**<u>Λύση</u>:**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3+4 & 6+3+4 & 8+3+4 \\ 2+1+1 & 3+1+1 & 4+1+1 \\ 2+1+1 & 3+1+1 & 4+1+1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Αν δυο πίνακες $A$ και $B$ είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται το άθροισμα $A+B$ και το γινόμενο $A \cdot B$, να δειχθεί ότι και οι δυο είναι τετραγωνικοί πίνακες.

**<u>Λύση</u>:** Έστω ότι $A$ και $B$ είναι $(m \times n)$ και $(n \times r)$ πίνακες αντίστοιχα. Αφού ορίζεται το άθροισμα $A+B$ θα πρέπει ο αριθμός των γραμμών και των στηλών τους να είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή $m = r$ και $n = k$. Επίσης, αφού ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ θα πρέπει ο αριθμός των στηλών του $A$ να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του $B$, δηλαδή $n = r$. Συνεπώς έχουμε ότι $m = n = r = k$ και έτσι οι $A$ και $B$ πρέπει να είναι τετραγωνικοί πίνακες.

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, να δειχθεί ότι οι πίνακες $A \cdot A^t$ και $A^t \cdot A$ είναι συμμετρικοί.

**<u>Λύση</u>:** Ο $A^t$ είναι ο $(3 \times 2)$ πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ και ο $A$ είναι $(2 \times 3)$ πίνακας. Έτσι ορίζονται τα δυο γινόμενα $A \cdot A^t$ $(2 \times 2)$ και $A^t \cdot A$ $(3 \times 3)$.

α) $A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 4+0\cdot 5 \\ 3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 50 \end{bmatrix}.$

β) $A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 0+3\cdot 5 \\ 2\cdot 1+4\cdot 3 & 2\cdot 2+4\cdot 4 & 2\cdot 0+4\cdot 5 \\ 1\cdot 0+5\cdot 3 & 2\cdot 2+4\cdot 4 & 0\cdot 0+5\cdot 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 15 \\ 14 & 20 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}.$

5. Έστω $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

α) Τι είδους πίνακας είναι ο $A$;

β) Να βρεθούν τα στοιχεία: $a_{43}$, $a_{12}$, $a_{32}$, $a_{34}$, $a_{14}$, $a_{44}$.

γ) Να υπολογιστεί το ίχνος του $A$.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$

β) $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$

$$\gamma)\quad x\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\0\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\3x+12-3y\end{bmatrix}.$$

7. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

$$\alpha)\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix},\qquad \beta)\ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}.$$

$$\gamma)\ \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}.\quad \delta)\ \begin{bmatrix}5 & 20 & 16 & 7 & 17\\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21\\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1500\\800\\500\\100\\1000\end{bmatrix}.$$

## 1.6 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΠΙΝΑΚΑ (DETERMINANT OF A MATRIX)

Έστω ο $(2\times 2)$ πίνακας $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, ο αριθμός $a\cdot d-b\cdot c$ ονομάζεται **ορίζουσα (determinant)** του $A$ και συμβολίζεται με $|A|$ ή $det(A)$ ή $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$. Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζεται η ορίζουσα οποιουδήποτε τετραγωνικού πίνακα. Για παράδειγμα, για τους πίνακες 3$^{ης}$ τάξης :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

επιλέγουμε μια γραμμή ή μια στήλη (συνήθως αυτή που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τις υπό-ορίζουσες (cofactors) των στοιχείων της επιλεγμένης γραμμής ή στήλης.

Με τον όρο υπό-ορίζουσα ενός στοιχείου του πίνακα $A$, 3$^{ης}$ τάξης, εννοούμε την ορίζουσα 2$^{ης}$ τάξης που προκύπτει από τον $A$ αν απαλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο στοιχείο.

Π.χ., για τον πίνακα $A$ πιο πάνω, αν επιλέξουμε την πρώτη γραμμή έχουμε τις εξής υπό-ορίζουσες:

Για το στοιχείο $a_{11}$ έχουμε: $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$.

Για το στοιχείο $a_{12}$ έχουμε: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$.

Για το στοιχείο $a_{13}$ έχουμε: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}$.

Τώρα η ορίζουσα του $A$ δίνεται από τη σχέση:

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11} \cdot \left(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}\right) - a_{12} \cdot \left(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}\right) + a_{13} \cdot \left(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}\right).$$

Δηλαδή, για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα 3$^{ης}$ τάξης πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο μιας επιλεγμένης γραμμής ή στήλης του με την αντίστοιχη υπό-ορίζουσα 2$^{ης}$ τάξης, σχηματίζοντας έτσι τρεις όρους, τους οποίους προσθέτουμε μεταξύ τους με <u>εναλλαγή</u> των πρόσημων $+-+\cdots$, αρχίζοντας πάντοτε από την πρώτη γραμμή, πρώτη στήλη με $+$.

Για πίνακες ανώτερης τάξης π.χ. τάξης $m \succ 3$ οι υπό-ορίζουσες των στοιχείων του είναι ορίζουσες τάξης $m-1$, στη συνέχεια σχηματίζονται υπό-ορίζουσες $m-2$ κ.ο.κ.

**<u>Παραδείγματα</u>:** α) Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, η ορίζουσα είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot 3 - 6 \cdot (-2) = 27 + 12 = 39.$$

β) Για τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, επιλέγουμε την πρώτη γραμμή και έχουμε:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}\;\Rightarrow$$

$$|B|=1\cdot(3\cdot2-1\cdot1)-0\cdot(2\cdot2-1\cdot3)+1(2\cdot1-3\cdot3)=5-0-7=-2.$$

γ) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα: $\Gamma=\begin{bmatrix}2&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&2\\1&2&3&0\end{bmatrix}$.

Ο πίνακας $\Gamma$ είναι ένας $(4\times4)$ πίνακας, οπότε για τον υπολογισμό της ορίζουσάς του θα δημιουργηθούν κατ' αρχάς υπό-ορίζουσες $(3\times3)$ και στη συνέχεια άλλες $(2\times2)$.

Επιλέγουμε την $3^{η}$ γραμμή, πάντα έχοντας υπ' όψη την εναλλαγή των προσήμων και έχουμε:

$$|\Gamma|=\begin{vmatrix}2&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&2\\1&2&3&0\end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&3\\1&2&0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&2&3\end{vmatrix}.$$

Τώρα, για τις δυο $(3\times3)$ υπό-ορίζουσες επιλέγουμε, για την μεν πρώτη τη δεύτερη στήλη, για δε την άλλη την πρώτη γραμμή και έχουμε:

$$|\Gamma|=+1\cdot\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&3\\1&2&0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&0\\1&2&3\end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}-2\left(2\cdot\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}\right)\;\Rightarrow$$

$$|\Gamma|=(2\cdot0-1\cdot1)-3\cdot(2\cdot2-0\cdot1)-2\cdot2(1\cdot3-0\cdot2)\;=-1-3\cdot4-4\cdot3=-25.$$

Όπως είδαμε στα πιο πάνω απλά παραδείγματα ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα μπορεί να είναι δύσκολη και επίπονη διαδικασία. Πολλές φορές όμως αυτή η διαδικασία γίνεται απλούστερη αν παρατηρήσουμε ορισμένα στοιχεία του πίνακα και τις ακόλουθες ιδιότητες.

## 1.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ (IDENTITIES)

1. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) ενός πίνακα $A$ είναι μηδέν, τότε η ορίζουσα αυτού είναι $|A| = 0$. Για παράδειγμα για τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } |A| = 0 \text{ λόγω της τρίτης γραμμής.}$$

2. Αν δυο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα $A$ έχουν τα στοιχεία τους ίσα μεταξύ τους, τότε $|A| = 0$. Για παράδειγμα για τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \ |A| = 0, \text{ αφού η πρώτη στήλη είναι ίδια με την τρίτη.}$$

3. Αν όλα τα στοιχεία κάτω ή πάνω από την κύρια διαγώνιο ενός πίνακα $A$ είναι 0, τότε η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Για παράδειγμα για τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε: } |A| = 2 \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 1 = -20.$$

4. Αν ένας πίνακας $B$ προκύπτει από την πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής (ή στήλης) ενός άλλου πίνακα $A$ σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη), τότε $|A| = |B|$. Για παράδειγμα έστω ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την τρίτη γραμμή $\times(-2)$ και την προσθέσουμε στην πρώτη, παίρνουμε τον πίνακα:

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&3&5&2\\1&2&1&3\\0&5&6&2\end{bmatrix}$$, άρα $|A|=|B|$ και λόγω της (1) παραπάνω $|A|=|B|=0$.

5. Αν ένας πίνακας $B$ προκύπτει από την εναλλαγή δυο γραμμών (ή στηλών) ενός άλλου πίνακα $A$, τότε $|A|=-|B|$. Για παράδειγμα έστω ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1&6\\0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&1&-3&4\end{bmatrix},$$ ο πίνακας $$B=\begin{bmatrix}2&2&1&6\\0&1&-3&4\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$ προκύπτει από

την εναλλαγή της δεύτερης και τέταρτης γραμμής. Άρα $|A|=-|B|$ και λόγω της (3) πιο πάνω $|A|=-|B|=-(2\cdot 1\cdot 2\cdot 1)=-4$.

6. Αν ένας πίνακας $B$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας επί κάποιον αριθμό, $k$, τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) ενός άλλου πίνακα $A$, τότε $|B|=k\cdot|A|$. Για παράδειγμα έστω ο πίνακας:

$$A=\begin{bmatrix}6&3&9\\7&3&5\\10&5&8\end{bmatrix},\ \text{τότε}\ B=\begin{bmatrix}3\cdot 2&3\cdot 1&3\cdot 3\\7&3&5\\10&5&8\end{bmatrix}\ \text{και έτσι}\ |A|=3\begin{vmatrix}2&1&3\\7&3&5\\10&5&8\end{vmatrix}.$$

7. Η ορίζουσα του γινομένου δυο πινάκων τάξης $m$ ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των δυο πινάκων. Για παράδειγμα έστω οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}2&5\\-3&7\end{bmatrix}\ \text{και}\ B=\begin{bmatrix}1&12\\0&-9\end{bmatrix},$$

τότε $$|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}2&5\\-3&7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&12\\0&-9\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB|=\left[2\cdot 7-5\cdot(-3)\right]\cdot\left[1\cdot(-9)-12\cdot 0\right]=-261.$$

## 1.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των εξής πινάκων:

α) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$,

γ) $\Gamma=\begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & -1/2 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, δ) $E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix}=26$, β) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=60$, γ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & z \end{vmatrix}=12$.

**<u>Λύση</u>:** α) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix}=26 \Rightarrow x(7-x)-(-2)\cdot 7=26 \Rightarrow x^2-7x+12=0$

$$\Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow x=3 \text{ ή } x=4.$$

β) Αφού τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι όλα 0, έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=60 \Rightarrow 3x(x-1)=60 \Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow (x-5)(x+4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ ή } x=-4.$$

3. Να υπολογιστούν οι εκφράσεις:

α) $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$, β) $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$, γ) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$.

4. Για τον πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ να υπολογιστούν οι υπό-ορίζουσες των στοιχείων: α) $a_{31}$, β) $a_{22}$, γ) $a_{23}$, δ) $a_{32}$.

## 1.8 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ (INVERSE MATRIX)

Αν ενός τετραγωνικού πίνακα $A$ η ορίζουσα είναι μηδέν, τότε ο πίνακας αυτός δεν έχει αντίστροφο. Αν όμως $|A| \neq 0$, τότε ο πίνακας $A$ έχει αντίστροφο.

Δηλαδή, για τον πίνακα $A$ υπάρχει ένας πίνακας $A^{-1}$, τέτοιος ώστε: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Γενικά αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right)$ είναι ένας πίνακας τάξης $m$ και $|A| \neq 0$,

τότε έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

όπου $A_{ji}$ είναι οι υπό-ορίζουσες των στοιχείων $a_{ji}$ του ανάστροφου πίνακα $A^t$ με εναλλασσόμενο πρόσημο $+-+\cdots$.

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$ ονομάζεται <u>προσαρτημένος</u> (adjoint of a matrix) πίνακας του πίνακα $A$ και συμβολίζεται με $adjA$. Οπότε για τον αντίστροφο ενός πίνακα $A$ έχουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adjA .$$

**<u>Παραδείγματα</u>:** 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, να υπολογιστεί ο $A^{-1}$.

**<u>Λύση</u>:** Για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα επιλέγουμε τη δεύτερη στήλη και έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (3 \cdot 1 + 5 \cdot 2) - 1\left[2 \cdot (-5) - 3 \cdot 3\right] = 32 .$$

Αφού η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός, υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας. Επίσης έχουμε:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

και οι υπό-ορίζουσες (cofactor) των στοιχείων του ανάστροφου πίνακα, με εναλλασσόμενο πρόσημο, είναι οι εξής:

$$2: \quad +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot (-5) = 5 .$$

$3: \quad -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\left(-1\cdot 1 - 1\cdot 3\right) = 4.$

$2: \quad +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(-5\right) - 0\cdot 3 = 5.$

$-1: \quad -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -\left[3\cdot 1 - 2\cdot\left(-5\right)\right] = -13.$

$0: \quad +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 2\cdot 3 = -4.$

$1: \quad -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -\left[2\cdot\left(-5\right) - 3\cdot 3\right] = 19.$

$3: \quad +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(3\cdot 1 - 2\cdot 0\right) = 3.$

$-5: \quad -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\left[2\cdot 1 - 2\cdot\left(-1\right)\right] = -4.$

$1: \quad +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 3\cdot\left(-1\right) = 3.$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα $A$ είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adjA = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -13 & -4 & 19 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Αν $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ να υπολογιστεί ο $B^{-1}$.

<u>**Λύση:**</u> Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα $B$.

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = \left(-3\right)\cdot\left(-6\right) - 2\cdot 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0.$$

Άρα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $B^{-1}$. Τώρα $B^t = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

και οι ορίζουσες των στοιχείων αυτού με εναλλασσόμενο πρόσημο είναι:

$-3: \ +(-6) = -6$.

$8: \ -(2) = -2$.

$2: \ -(8) = -8$.

$-6: \ +(-3) = -3$.

Άρα ο αντίστροφος πίνακας είναι: $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$.

Μπορούμε να ελέγξουμε αν ένας πίνακας είναι πράγματι ο αντίστροφος ενός δοσμένου πίνακα αρκεί να τους πολλαπλασιάσουμε για να προκύψει ο μοναδιαίος πίνακας.

Έτσι στο πιο πάνω παράδειγμα έχουμε:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

## 1.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι των πινάκων:

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$, β) $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}$, γ) $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, δ) $G=\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ε) $N=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$,

στ) $M=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{o}$

## ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (LINEAR SYSTEMS)

### 2.5 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΥΠΟ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Μέσω των πινάκων και των οριζουσών μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε συστήματα γραμμικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}. \qquad (1)$$

Το παραπάνω είναι ένα γραμμικό σύστημα $(m \times n)$, δηλαδή $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους, όπου τα $a_{ij}$ και $b_i$ είναι σταθερές ποσότητες, ενώ τα $x_j$, $i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n$ είναι οι ζητούμενες ποσότητες (μεταβλητές).

Μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω γραμμικό σύστημα υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

ή

$$A \cdot X = B,$$

όπου

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ο μεν $A$ είναι ο $(m \times n)$ πίνακας των **συντελεστών των αγνώστων (factors of the unknowns)** του συστήματος, ο $X$ είναι ο $(n \times 1)$ πίνακας των **αγνώστων (unknown)** και ο $B$ είναι ο $(m \times 1)$ πίνακας των **σταθερών όρων (constant terms)** του συστήματος.

Ακόμη, ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \big| & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \big| & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \big| & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \big| & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

ονομάζεται <u>**επαυξημένος**</u> **(augmented matrix)** πίνακας του παραπάνω συστήματος.

Για το παραπάνω σύστημα, **λύση** ονομάζεται <u>κάθε</u> $n$-άδα πραγματικών αριθμών $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, από την οποία επαληθεύονται και οι $m$ εξισώσεις του ταυτόχρονα.

Ένα γραμμικό σύστημα, της μορφής (1) μπορεί να <u>μην</u> έχει καμία λύση και σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο**, να έχει άπειρες λύσεις και τότε καλείται **αόριστο** ή, τέλος, να έχει <u>μία</u> και μόνο λύση και τότε λέμε ότι το σύστημα έχει **μοναδική** λύση. Ένα σύστημα που έχει τουλάχιστον μια λύση ονομάζεται **συμβιβαστό**.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $B = 0$, δηλαδή $b_i = 0,\ \ \forall i = 1, 2, ..., m$, τότε το σύστημα (1) ονομάζεται **ομογενές**, ενώ αν $B \neq 0$, δηλαδή αν έστω ένα από τα $b_i \neq 0$, τότε ονομάζεται **μη-ομογενές**. Ένα ομογενές σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση, η οποία είναι προφανώς η μηδενική λύση. Δηλαδή η $n$-άδα $(0,\ 0,\ ...,\ 0)$ επαληθεύει πάντα ένα ομογενές γραμμικό σύστημα και κατά συνέπεια, αυτά είναι πάντα συμβιβαστά.

Τέλος, δυο συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις ονομάζονται **ισοδύναμα**.

<u>**Παραδείγματα**</u>**:** 1. Το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 3x - 6y + 2z &= 5 \\ -x + 2y - 4z &= 7 \end{aligned}\right\},$$

είναι ένα $(2\times 3)$ μη-ομογενές γραμμικό σύστημα, το οποίο υπό μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{ή} \quad A \cdot X = B, \text{ όπου}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix},\quad X\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2. Το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} -2x+12y+18z=0 \\ 10x+20y-45z=0 \\ -5x+\ \ 9y+14z=0 \end{array}\right\},$$

είναι ένα $(3\times 3)$ ομογενές (homogeneous) γραμμικό σύστημα, το οποίο υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} -2 & 12 & 18 \\ 10 & 20 & -45 \\ -5 & 9 & 14 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η διαδικασία υπολογισμού των στοιχείων (αριθμών) εκείνων που επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος ταυτόχρονα, ονομάζεται **επίλυση** του συστήματος. Είναι αυτονόητο, βέβαια, ότι για να μιλάμε για επίλυση ενός συστήματος πρέπει αυτό να είναι συμβιβαστό.

Γραμμικά συστήματα, όπως είναι τα παραπάνω, επιλύονται με διάφορους τρόπους, ορισμένους εκ των οποίων θα περιγράψουμε παρακάτω.

## 2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΑΠΑΛΟΙΦΩΝ ΤΟΥ GAUSS

Η μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών, γνωστή και ως **μέθοδος του Gauss**[1], επιτυγχάνεται με τη χρήση πράξεων στον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος. Οι πράξεις αυτές έχουν ως στόχο τη μετατροπή των στοιχείων του πίνακα που αντιστοιχούν στους συντελεστές των αγνώστων, δηλαδή τα $a_{ij}$, σε 0 και 1, με τρόπο ώστε να υπάρχει ένα μόνο $x_j$ σε κάθε γραμμή του πίνακα, με τρόπο ώστε:

(1) το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή να είναι το 1, ενώ όλα τα άλλα στη στήλη που αυτό αντιστοιχεί να είναι 0,
(2) το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή, δηλαδή το 1, να βρίσκεται στα δεξιά του 1 της προηγούμενης γραμμής,
(3) κάθε γραμμή που περιέχει μόνο μηδενικά να βρίσκεται κάτω από κάθε γραμμή που περιέχει μη-μηδενικά στοιχεία.

[1] Gauss, Carl F. (1777 – 1855) Γερμανός μαθηματικός, αστρονόμος και φυσικός.

Ένας πίνακες που πληροί τις πιο πάνω τρεις συνθήκες καλείται **κλιμακωτός (row echelon form)** πίνακας.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί;

α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

γ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, δ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**<u>Λύση</u>:** α) Αφού η δεύτερη γραμμή του πίνακα που περιέχει μόνο μηδενικά δεν βρίσκεται κάτω από όλες τις γραμμές που περιέχουν μη-μηδενικά, δεν είναι κλιμακωτός. Αυτό επιτυγχάνεται αν αλλάξουμε τις θέσεις της δεύτερης και τρίτης γραμμής του πίνακα αντίστοιχα.

β) Αφού το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής δεν είναι το 1, ο πίνακας δεν είναι κλιμακωτός. Ο πίνακας όμως, γίνεται κλιμακωτός αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη γραμμή του επί (1/3).

γ) Δεν είναι κλιμακωτός αφού το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της δεύτερης γραμμής δεν βρίσκεται δεξιά του πρώτου μη-μηδενικού της πρώτης. Αν αλλάξουμε τη θέση των δυο γραμμών του πίνακα, τότε γίνεται κλιμακωτός.

δ) Είναι ένας κλιμακωτός πίνακας.

Για την εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών απαλοιφών ακολουθούμε τα εξής. Αν στον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος κάνουμε τις παρακάτω πράξεις, ο πίνακας που θα προκύψει θα είναι <u>ισοδύναμος</u> με τον αρχικό. Το ίδιο, βέβαια, ισχύει και για το αρχικό και τελικό σύστημα.
Οι πράξεις αυτές είναι οι παρακάτω:

- Αν αλλάξουμε τη θέση δυο γραμμών του πίνακα μεταξύ τους.
- Αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής του πίνακα σε μια άλλη γραμμή αυτού.
- Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή του πίνακα επί κάποιο $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Με τις πράξεις, επί των γραμμών ενός πίνακα, σκοπός μας είναι να πάρουμε έναν κλιμακωτό πίνακα, ισοδύναμο με τον αρχικό και, να προκύψει έτσι η λύση του γραμμικού συστήματος από το οποίο προέρχεται ο συγκεκριμένος πίνακας.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο του Gauss.

1.

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=-1\\ 2x+\ \ y&=\ \ 5\\ x+\ \ y&=\ \ 1 \end{aligned}\right\}.$$

2.

$$\left.\begin{aligned} x+2y+4z-6&=0\\ 2z+y-3&=0\\ x+y+2z-1&=0 \end{aligned}\right\}.$$

3.

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+2z+6w&=10\\ y+2z\ \ +w&=\ \ 2\\ 3x\qquad -3z+6w&=\ \ 9 \end{aligned}\right\}.$$

**<u>Λύση</u>:** Για να λύσουμε τα συστήματα, γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα και στη συνέχεια κάνουμε τις πράξεις απαλοιφής, δηλαδή μετατροπής του αρχικού πίνακα σε έναν ισοδύναμο κλιμακωτό.

1.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ αλλάζουμε την πρώτη με την τρίτη γραμμή και έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-2) φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-2) φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή επί (-1):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-1) φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-1) φορές τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$, τώρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\left.\begin{array}{r} x+0\cdot y = 4 \\ 0\cdot x+ \quad y = -3 \\ 0\cdot x+0\cdot y = 0 \end{array}\right\}.$$

Άρα το αρχικό γραμμικό σύστημα έχει τη μοναδική λύση: $x=4, \quad y=-3$.

2. Κατ' αρχάς τοποθετούμε τις μεταβλητές των τριών εξισώσεων στη σωστή τους θέση, δηλαδή τα $x$ πρώτα, μετά τα $y$ και τέλος τα $z$. Επίσης οι σταθερές ποσότητες πρέπει να βρίσκονται στο δεξί μέλος των εξισώσεων. Οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+4z=6 \\ y+2z=3 \\ x+\ \ y+\ \ 2z=1 \end{array}\right\}$$ και ο επαυξημένος πίνακάς του είναι ο εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-1) φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -5\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-2) φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -5\end{array}\right]$$ προσθέτουμε  τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right]$$ πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί (-1/2):

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-3) φορές την τρίτη  γραμμή στη δεύτερη:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$. Τώρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\left.\begin{array}{r}x=0\\ y+2z=0\\ 0=1\end{array}\right\}.$$

Το σύστημα δεν έχει καμία λύση λόγω της τρίτης εξίσωσης αφού $0 \neq 1$ και κατά συνέπεια είναι ένα αδύνατο σύστημα.

3.

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y+2z+6w=10\\ \quad\quad y+2z\ \ +w=\ \ 2\\ 3x\quad\ \ -3z+6w=\ \ 9\end{array}\right\}$$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο εξής:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 3 & 2 & 6 & 10\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9\end{array}\right]$$ πολλαπλασιάζουμε την $1^{\eta}$ γραμμή επί (1/2):

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3/2 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-3) φορές την 1η γραμμή στην 3η:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3/2 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -9/2 & -6 & -3 & -6\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-3/2) φορές τη 2η γραμμή στην 1η :

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 3/2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -9/2 & -6 & -3 & -6\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (9/2) φορές τη 2η γραμμή στην 3η:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 3/2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3/2 & 3\end{array}\right]$$ πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή επί (1/3):

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 3/2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (2) φορές την 3η γραμμή στην 1η:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 5/2 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1\end{array}\right]$$ προσθέτουμε (-2) φορές την 3η γραμμή στη 2η:]

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 5/2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1\end{array}\right]$$. Ο πίνακας είναι πλέον κλιμακωτός.

Τώρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\left.\begin{array}{r}x+\frac{5}{2}w=4\\ y=0\\ z+\frac{1}{2}w=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}w+4\\ y=0\\ z=-\frac{1}{2}w+1\\ w=w\end{array}\right\}.$$

Προφανώς υπάρχουν άπειρες λύσεις του συστήματος αυτού, αφού η τελευταία εξίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Για την ακρίβεια, η τελευταία μεταβλητή $w$ είναι μια <u>παράμετρος</u> (parameter) ή <u>ελεύθερη μεταβλητή</u> του συστήματος και από αυτή εξαρτώνται οι μεταβλητές $x$ και $z$.

Μπορούμε να έχουμε μια <u>ειδική</u> λύση του συστήματος θέτοντας μια τιμή για την $w$, π.χ. έστω $w=2$, τότε έχουμε την ειδική λύση: $x=-1,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ w=2$.

Για <u>ομογενή</u> γραμμικά συστήματα: $A \cdot X = 0$, ισχύουν τα ακόλουθα:

**<u>Θεώρημα</u>:** Έστω $\tilde{A}$ ο κλιμακωτός ισοδύναμος του πίνακα $A$, των συντελεστών των αγνώστων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος $(m \times n)$. Αν ο $\tilde{A}$ έχει ακριβώς $k$ γραμμές, οι οποίες περιέχουν μη-μηδενικά στοιχεία, τότε $k \leq n$ και ακόμη.

1) Αν $k \prec n$, τότε το σύστημα έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

2) Αν $k=n$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, δηλαδή $x_j=0,\ \ j=1,2,...,n$.

3) Αν το σύστημα έχει λιγότερες εξισώσεις από τους αγνώστους, τότε αυτό έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Να ελεγχθούν ως προς τις λύσεις τους τα παρακάτω ομογενή γραμμικά συστήματα.

$$\text{α)}\quad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 2x-y+5z&=0\\ x+y+4z&=0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{β)}\quad \left.\begin{aligned} 3x+4y&=0\\ x-2y&=0\\ 2x+\ \ y&=0\\ 2x+3y&=0 \end{aligned}\right\}.$$

**<u>Λύση</u>:** Βρίσκουμε τον κλιμακωτό ισοδύναμο πίνακα των συντελεστών των αγνώστων:

α)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-2) φορές την $1^{η}$ γραμμή στη $2^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-1) φορές την $1^{η}$ γραμμή στην $3^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-1) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στη $3^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ πολλαπλασιάζουμε τη $2^{η}$ γραμμή επί (1/3):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (2) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στην $1^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς ο κλιμακωτός ισοδύναμος πίνακας έχει δυο γραμμές με μη-μηδενικά στοιχεία, ενώ το αρχικό σύστημα έχει τρεις αγνώστους. Άρα, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι οι εξής: $x = -3z, \quad y = -z, \quad z = z$, (η $z$ είναι η ελεύθερη μεταβλητή).

β)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ πολλαπλασιάζουμε την $1^{η}$ γραμμή επί (1/3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-2) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στην $3^{η}$ και $4^{η}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-7/5) φορές την $3^{η}$ γραμμή στην $4^{η}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (-1) φορές την $1^{η}$ γραμμή στη $2^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & -10/3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (15/10) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στην $3^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & -10/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ προσθέτουμε (4/10) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στην $1^{η}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -10/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ πολλαπλασιάζουμε τη $2^{η}$ γραμμή επί (-3/10):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς ο κλιμακωτός ισοδύναμος πίνακας έχει δυο γραμμές με μη-μηδενικά στοιχεία, όσους ακριβώς αγνώστους έχει το αρχικό σύστημα. Και έτσι, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, $x = 0, \quad y = 0$ .

## 2.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER

Μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια της ορίζουσας πινάκων που προκύπτουν από αυτό, αρκεί το σύστημα να έχει τόσες γραμμές, όσες και στήλες, δηλαδή να είναι $(n \times n)$.

Η πρώτη μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια οριζουσών, που θα περιγράψουμε, στηρίζεται στον κανόνα του **Cramer**[2] και είναι η ακόλουθη.

**<u>Κανόνας Cramer</u>:** Έστω ένα γραμμικό σύστημα με $n$ εξισώσεις και $n$ αγνώστους:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots & +a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

και οι ορίζουσες:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

[2] Cramer, Gabriel (1704 – 1752) Ελβετός μαθηματικός.

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Αν $\Delta \neq 0$, τότε το σύστημα (4) έχει <u>μοναδική</u> λύση (unique solution), η οποία δίνεται από τα εξής πηλίκα:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \tag{5}$$

**<u>Παραδείγματα</u>:** 1) Να επιλυθεί το παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο Cramer.

$$\left.\begin{aligned} 2x + \phantom{3}y + \phantom{2}z &= 0 \\ 4x + 3y + 2z &= 2 \\ 2x - \phantom{3}y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

2) Να επιλυθεί το παρακάτω συστήματα, ως προς $z$, με τη μέθοδο Cramer.

$$\left.\begin{aligned} x + y \phantom{+z} + 5w &= 6 \\ x + 2y + z \phantom{+w} &= 4 \\ 2y + z + w &= 6 \\ 3x \phantom{+2y+z} - 4w &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

**<u>Λύση</u>:** 1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1)\right] - \left[4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2\right] + \left[4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2\right]$$

$$= 2(-7) - (-16) + (-10) = -14 + 16 - 10 = -8.$$

Αφού $\Delta = -8 \neq 0$, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση και με τη μέθοδο του Cramer, πρέπει να υπολογίσουμε τις εξής ορίζουσες:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2\left(-3 \cdot 1 + 1 \cdot 1\right) = 4\,.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\left(-3 \cdot 2 - 2 \cdot 1\right) = -16\,.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\left(-1 \cdot 2 - 2 \cdot 1\right) = 8\,.$$

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{-8}, \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-16}{-8} \quad \Rightarrow y = 2\,,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{8}{-8} \quad \Rightarrow z = -1\,.$$

2) $$\left.\begin{array}{r} x + \phantom{2}y \phantom{{}+z} + 5w = 6 \\ x + 2y + z \phantom{{}+5w} = 4 \\ 2y + z + w = 6 \\ 3x \phantom{{}+2y+z} - 4w = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την πιο πάνω ορίζουσα ευκολότερα, κάνουμε τις εξής πράξεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των οριζουσών.

Προσθέτουμε (-1) φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και παίρνουμε:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$, προσθέτουμε (-2) φορές τη $2^{η}$ γραμμή στην $3^{η}$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&5\\0&1&1&-5\\0&0&-1&11\\3&0&0&-4\end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (-3) φορές την $1^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&5\\0&1&1&-5\\0&0&-1&11\\0&-3&0&-19\end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (3) φορές τη $2^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&5\\0&1&1&-5\\0&0&-1&11\\0&0&3&-34\end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (3) φορές την $3^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&5\\0&1&1&-5\\0&0&-1&11\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1)=1.$$

(Λόγω της $3^{ης}$ ιδιότητας της ορίζουσας).

Τώρα η ορίζουσα που αντιστοιχεί στη ζητούμενη μεταβλητή $z$ είναι:

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&6&5\\1&2&4&0\\0&2&6&1\\3&0&2&-4\end{vmatrix}.$$

Και πάλι απλοποιούμε την ορίζουσα αυτή με τη χρήση των ιδιοτήτων. Προσθέτουμε (-1) φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη:

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&6&5\\0&1&-2&-5\\0&2&6&1\\3&0&2&-4\end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (-2) φορές τη $2^η$ γραμμή στην $3^η$:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (-3) φορές την $1^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & -3 & -16 & -19 \end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (3) φορές τη $2^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -22 & -34 \end{vmatrix}$$, προσθέτουμε (22/10) φορές την $3^η$ γραμμή στην $4^η$:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -49/5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 10\cdot\left(-\frac{49}{5}\right) = -98.$$

Άρα $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-98}{1} \Rightarrow z = -98$.

## 2.8 ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΙΝΑΚΑ

**Ορισμός:** Έστω ένας $(m\times n)$ πίνακας $A$, **βαθμό** $r$, συμβολικά $rank(A)$, αυτού ονομάζουμε τον αριθμό των γραμμών του ισοδύναμου κλιμακωτού πίνακα, οι οποίες περιέχουν έστω και ένα μη-μηδενικό στοιχείο.

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι ο βαθμός $r$ του πίνακα $A$, είναι η τάξη της μέγιστης υπό-ορίζουσας (cofactor) αυτού που είναι διάφορη του μηδενός. Δηλαδή, αν για παράδειγμα ένας πίνακας $(3\times 4)$ έχει όλες τις $(3\times 3)$ υπό-ορίζουσες ίσες με μηδέν και μια τουλάχιστον εκ των $(2\times 2)$ υπό-ορίζουσα διάφορη του μηδενός, τότε $rank(A) = 2$.

Για έναν τετραγωνικό πίνακα $A$ $(n\times n)$, αν $|A|\neq 0$, τότε, προφανώς, $rank(A)=n$ και αντιστρόφως, δηλαδή $|A|\neq 0 \Leftrightarrow rank(A)=n$.

**<u>Παραδείγματα</u>:** 1) Ο $(3\times 2)$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

έχει βαθμό 2, αφού μία τουλάχιστον $(2\times 2)$ υπό-ορίζουσα αυτού, π.χ. η $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1-(-4)\cdot 0 = 1\neq 0$.

2) Ο $(4\times 4)$ πίνακας

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

έχει μηδενική ορίζουσα, αφού η τρίτη γραμμή του προκύπτει από την πρώτη επί (-2).

Ακόμη η $(3\times 3)$ υπό-ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(4-18)+2(1-6)$$

$$= -42-10 = -52 \neq 0 .$$

Άρα $rank(B)=3$.

Με τη χρήση του βαθμού και του αντίστροφου ενός πίνακα μπορούμε να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα τάξης $(m\times n)$.

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array},$$

ή

$A \cdot X = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Για να το επιλύσουμε με τη βοήθεια του αντίστροφου πίνακα, βρίσκουμε το βαθμό $r$ του πίνακα $A$, των συντελεστών των αγνώστων και έχουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(i) Αν $r = m = n$, δηλαδή ο πίνακας $A$ είναι τετραγωνικός με $|A| \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1}$ του $A$, τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε.

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε επί $A^{-1}$ εξ αριστερών την εξίσωση $A \cdot X = B$ και παίρνουμε:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow$$

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Συνεπώς έχουμε τη λύση του συστήματος, η οποία βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τη στήλη των σταθερών ποσοτήτων εξ αριστερών επί $A^{-1}$.

(ii) Αν $r = m \prec n$, δηλαδή ο πίνακας $A$ δεν είναι τετραγωνικός, τότε $n - r$ μεταβλητές $x_i$, $i = 1, 2, ..., n - r$ παίρνουν αυθαίρετες τιμές και για τις υπόλοιπες προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $r$ αγνώστων με $r$

εξισώσεις, το οποίο μπορούμε να λύσουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

(iii) Αν $r \prec m$, τότε υπολογίζουμε το βαθμό του επαυξημένου πίνακα:

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

και μπορεί να προκύψει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $rank(E) = r = n$ και το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση.

(β) $rank(E) \neq r$ και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

(γ) $rank(E) = r \prec n$ και το αρχικό σύστημα είναι αόριστο.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τον αντίστροφο πίνακα.

1. $\left.\begin{array}{r} x \qquad\quad - z = 1 \\ 4x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - 10z = -1 \end{array}\right\}.$

2. $\left.\begin{array}{r} x \qquad - z \quad + w = 1 \\ 3x + y - z - 2w = 4 \\ x + 2y + 6z - w = 3 \end{array}\right\}.$

3. $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ x + 5y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\}.$

**<u>Λύση</u>:**

1. Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -10\end{bmatrix}$$, που είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $(3\times 3)$.

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα αυτού,

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -10\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(20-2)-2(8+2)=-2\neq 0.$$

Συνεπώς υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας και προχωρούμε στην εύρεσή του.

Ο ανάστροφος πίνακας είναι: $A^t=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -10\end{bmatrix}$.

Για τις υπό-ορίζουσες αυτού, με εναλλασσόμενο πρόσημο, έχουμε:

1: $+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -10\end{vmatrix}=18$. 4: $-\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & -10\end{vmatrix}=-4$. 1: $+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4$.

0: $-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & -10\end{vmatrix}=41$. -2: $+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -10\end{vmatrix}=-8$. 2: $-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-9$.

-2: $+\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=10$. 1: $-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$. -10: $+\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$.

Οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-9 & 2 & 2\\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2}\\ -5 & 1 & 1\end{bmatrix}$$ και έτσι η λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\dfrac{41}{2} & 4 & \dfrac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9+4-2 \\ -\dfrac{41}{2}+8-\dfrac{9}{2} \\ -5+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Άρα $x=-7,\ \ y=-17$ και $z=-4$.

2. $\left.\begin{array}{r} x \qquad\ -z \quad +w=1 \\ 3x+\ \ y-\ \ z-2w=4 \\ x+2y+6z\ \ -w=3 \end{array}\right\}$. Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$ που είναι ένας $(3\times 4)$. Για το βαθμό αυτού έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8-5=3.$$

Άρα $rank(A)=3 \Rightarrow r=m \prec n$ και έτσι ισχύει η περίπτωση (ii) πιο πάνω. Γράφουμε το αρχικό σύστημα ως εξής:

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad\ -z=1-w \\ 3x+\ \ y-\ \ z=4+2w \\ x+2y+6z=3+w \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-w \\ 4+2w \\ 3+w \end{bmatrix}$$

ή $A\cdot X=B$,

όπου

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1-w \\ 4+2w \\ 3+w \end{bmatrix}.$$

Τώρα πρέπει να βρούμε τον $A^{-1}$.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Για τις υπό-ορίζουσες αυτού, με εναλλασσόμενο πρόσημο, έχουμε:

1: $+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 8$. 3: $-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2$. 1: $+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

0: $-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -19$. 1: $+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 7$. 2: $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$.

-1: $+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. -1: $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$. 6: $+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Οπότε ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \text{ Συνεπώς } \quad X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-w \\ 4+2w \\ 3+w \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8-8w}{3} - \frac{8-4w}{3} + \frac{3+w}{3} \\ -\frac{19-19w}{3} + \frac{28+14w}{3} - \frac{6+2w}{3} \\ \frac{5-5w}{3} - \frac{8+4w}{3} + \frac{3+w}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+w}{3} \\ \frac{3+31w}{3} \\ -\frac{8w}{3} \end{bmatrix}.$$

Άρα $x = \frac{3+w}{3}$, $y = \frac{3+31w}{3}$, $z = -\frac{8w}{3}$ και το αρχικό σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

3. $\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=3 \\ 3x-2y-z=5 \\ x+5y+3z=0 \\ x+3y+4z=1 \end{array}\right\}$ ή $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο $(4 \times 3)$ πίνακας:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, για τον οποίο έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-6+5) - 2(9+1) + 2(15+2) = -1 - 20 + 34 = 13 \neq 0.$$

Συνεπώς για τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων έχουμε $r = 3 \prec m = 4$ και έτσι πρέπει να εξετάσουμε το βαθμό του επαυξημένου πίνακα:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Η ορίζουσα αυτού είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^{\eta}$ γραμμή, διαδοχικά επί (-3) και την προσθέτουμε στη $2^{\eta}$, επί (-1) και την προσθέτουμε στην $3^{\eta}$ και 4η. Έτσι η πιο πάνω ορίζουσα είναι ίση με την

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -7 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -7 & -8 \end{vmatrix}$$

(αλλάξαμε τη $2^{\eta}$ και την $4^{\eta}$ γραμμή μεταξύ τους).

Τώρα πολλαπλασιάζουμε τη $2^{\eta}$ γραμμή διαδοχικά επί (-3) και επί (8) και την προσθέτουμε στην $3^{\eta}$ και $4^{\eta}$ αντίστοιχα.

Έτσι παίρνουμε:

$$|E| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -24 \end{vmatrix}$$

προσθέτουμε (9/5) επί $3^{\eta}$ γραμμή στην $4^{\eta}$ και έχουμε:

$$|E| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -93/5 \end{vmatrix} = -\left[1\cdot 1\cdot(-5)\cdot\left(-\frac{93}{5}\right)\right] = -93.$$

Αφού η ορίζουσα του επαυξημένου πίνακα είναι διάφορη του μηδενός, ο βαθμός αυτού είναι $rank(E)=4$ ενώ $rank(A)=3$. Συνεπώς το αρχικό σύστημα δεν έχει καμία λύση, δηλαδή είναι αδύνατο.

## 2.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο Gauss.

α) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=4 \\ 3x+y-4z=-2 \end{array}\right\},$ β) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=0 \\ 4x+y-2z=-1 \\ -x-3y+3z=2 \end{array}\right\},$

γ) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=20 \\ -x-4y+5z=-10 \\ 8x+3y-2z=30 \end{array}\right\}.$

2. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα με τη μέθοδο Cramer.

α) $\left.\begin{array}{r} 5x+y+2z=0 \\ 2x+2z=-4 \\ 4x+y-5z=6 \end{array}\right\},$ β) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-7=0 \\ 2x+y-2z-1=0 \\ -3y+3z+2=0 \end{array}\right\},$

γ) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=-9 \\ -4y+5z=-1 \\ 8x-2z=0 \end{array}\right\}.$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{l} 5x+y+2z-5w=3 \\ 2x+2z+2w=-5 \\ 6x+2y-z=6 \end{array}\right\}$, β) $\left.\begin{array}{l} -x+7w=-6 \\ 2x+y-2z-w=1 \\ -3y+3z+2w=0 \end{array}\right\}$,

γ) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=-9 \\ -4y+5z=-1 \\ 8x \quad -2z=0 \end{array}\right\}$. δ) $\left.\begin{array}{l} -x-3y=-6 \\ 2x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \\ 5x-3y+z=9 \end{array}\right\}$.

## <u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^o$</u>

## ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ (DIAGONALIZATION)

### 3.2 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ (EIGENVALUES & EIGENVECTORS)

**<u>Ορισμός</u>:** Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A=\left(a_{ij}\right)$, $i, j=1,2,\ldots,m$, όπου $a_{ij}\in\mathbb{R}$ (τα στοιχεία του πίνακα $A$ θα μπορούσαν να είναι και μιγαδικοί αριθμοί, δηλαδή $a_{ij}\in\mathbb{C}$). Ένας πραγματικός (ή μιγαδικός) αριθμός $\lambda$ ονομάζεται **<u>ιδιοτιμή</u>** ή **<u>χαρακτηριστική</u> <u>τιμή</u>** του πίνακα $A$, αν υπάρχει μη-μηδενικός $(m\times 1)$ πίνακας $X$,

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

όπου $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,m$ (ή $x_i\in\mathbb{C}$), τέτοιος ώστε:

$$A\cdot X=\lambda\cdot X \quad \text{ή} \quad \left(A-\lambda\cdot I\right)\cdot X=0.$$

Με άλλα λόγια ισχύει το σύστημα:

$$\begin{array}{c} \left(a_{11}-\lambda\right)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+\left(a_{22}-\lambda\right)x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+\left(a_{mm}-\lambda\right)x_m=0 \end{array}. \qquad (1)$$

Ο $(m\times 1)$ πίνακας $X$ ονομάζεται **<u>ιδιοδιάνυσμα</u>** ή **<u>χαρακτηριστικό διάνυσμα</u>** του πίνακα $A$, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda$.

Το ομογενές σύστημα (1) πιο πάνω έχει μη-μηδενικές λύσεις αν και μόνον αν η ορίζουσα:

$$\left|A-\lambda\cdot I\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα της παραπάνω σχέσης (2), θα προκύψει ένα πολυώνυμο $\chi(\lambda)$, ως προς την ιδιοτιμή $\lambda$, το οποίο είναι βαθμού $m$, και ονομάζεται **<u>χαρακτηριστικό</u> <u>πολυώνυμο</u> (characteristic polynomial)** του πίνακα $A$.

Ακόμη, η εξίσωση:

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = 0, \tag{3}$$

ονομάζεται **<u>χαρακτηριστική</u> <u>εξίσωση</u> (characteristic equation)** του $A$.

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα $A$ κάνουμε τα ακόλουθα:

- Επιλύουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του δοθέντος πίνακα $A$, οι ρίζες της οποίας είναι οι ιδιοτιμές αυτού.

- Αν από την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης προκύψει έστω και μια ιδιοτιμή $\lambda$, του πίνακα $A$, τότε είναι προφανές ότι το ομογενές σύστημα (1) έχει μη-μηδενικές λύσεις $x_1, x_2, ..., x_m$ και οι πίνακες στήλη $(m \times 1)$ $X$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda$.

**<u>Παράδειγμα</u>:** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές, των παρακάτω πινάκων:

α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, β) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

γ) $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, δ) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

**<u>Λύση</u>:** α) Πρώτα λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\chi(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = 0$ του πίνακα $A$ και έχουμε:

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-4) = 0.$$

Άρα $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = -1$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$.

Τώρα για την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ , το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $A$ είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(1-4)x_1 + 2x_2 = 0\\ 3x_1 + (2-4)x_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-3x_1 + 2x_2 = 0\\ 3x_1 - 2x_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 2x_2.$$

Άρα ένα μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ είναι το $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Προφανώς υπάρχουν άπειρα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα για αυτή την ιδιοτιμή, της μορφής: $k \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $A$ είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(1+1)x_1 + 2x_2 = 0\\ 3x_1 + (2+1)x_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x_1 + 2x_2 = 0\\ 3x_1 + 3x_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Άρα ένα μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ είναι το $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Επίσης κάθε πολλαπλάσιο αυτού είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$.

β) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\chi(\lambda) = |B - \lambda \cdot I| = 0$ του πίνακα $B$ και έχουμε:

$$\chi(\lambda)=|B-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 3\\ 0 & 2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)=0.$$

Άρα $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$ και $\lambda_3=2$ είναι οι τρεις ιδιοτιμές του πίνακα $B$.

Τώρα για την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $B$ είναι:

$$\left.\begin{aligned}(-1+1)x_1 \qquad\qquad +3x_3=0\\ (2+1)x_2-3x_3=0\\ (1+1)x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}3x_3=0\\ 3x_2-3x_3=0\\ 2x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}x_1=x_1\\ x_2=0\\ x_3=0\end{aligned}\right\}.$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ είναι το $X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Υπάρχουν δε άπειρα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα, της μορφής $\begin{bmatrix}k\\0\\0\end{bmatrix}$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$, το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $B$ είναι:

$$\left.\begin{aligned}(-1-1)x_1 \qquad\qquad +3x_3=0\\ (2-1)x_2-3x_3=0\\ (1-1)x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}-2x_1+3x_3=0\\ x_2-3x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}2x_1=3x_3\\ x_2=3x_3\end{aligned}\right\}.$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ είναι το $X_2=\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$.

Επίσης, όλα τα πολλαπλάσια $k\cdot X$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=2$, το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $B$ είναι:

$$\left.\begin{array}{r}(-1-2)x_1 \qquad\qquad +3x_3=0\\ (2-2)x_2-3x_3=0\\ (1-2)x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-3x_1+3x_3=0\\ -3x_3=0\\ x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=x_3\\ x_2=x_2\\ x_3=0\end{array}\right\}.$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_3=2$ είναι το $X_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

Επίσης υπάρχουν άπειρα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα, της μορφής $\begin{bmatrix}0\\k\\0\end{bmatrix}$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=2$.

γ) $\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\chi(\lambda)=|\Gamma-\lambda\cdot I|=0$ του πίνακα $\Gamma$ και έχουμε:

$$|\Gamma-\lambda\cdot I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-1-\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda=-1$$

Άρα έχουμε μια ιδιοτιμή $\lambda=-1$ (διπλή ρίζα) του πίνακα $\Gamma$, για την οποία το γραμμικό σύστημα (1) που αντιστοιχεί στον πίνακα $\Gamma$ είναι:

$$\left.\begin{array}{r}0\cdot x_1+0\cdot x_2=0\\ x_1+0\cdot x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=x_2\end{array}\right\}.$$

Συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=-1$ του πίνακα $\Gamma$ είναι της μορφής:

$\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

δ) $E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\chi(\lambda)=|E-\lambda\cdot I|=0$ του πίνακα $E$ και έχουμε:

$$\left|E-\lambda\cdot I\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left(-\lambda\right)^2+1=0\Rightarrow\lambda^2=-1.$$

Η εξίσωση που προέκυψε δεν έχει πραγματικές, αλλά μιγαδικές λύσεις, δηλαδή $\lambda\in\mathbb{C}$ και οι οποίες είναι, $\lambda_1=-i$ και $\lambda_2=i$, ( $i=\sqrt{-1}$ ή $i^2=-1$).

Τώρα τα γραμμικά συστήματα που αντιστοιχούν στις δυο αυτές (μιγαδικές) χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα $E$ είναι.

Για την $\lambda_1=-i$:

$$\left.\begin{aligned}-ix_1+x_2&=0\\ -x_1-ix_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}ix_1&=\ \ x_2\\ -x_1&=ix_2\end{aligned}\right\}.$$

Άρα ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα $E$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_1=-i$ είναι το $X_1=\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$. Επίσης όλα τα πολλαπλάσια αυτού είναι χαρακτηριστικά διανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1=-i$.

Για την $\lambda_1=i$:

$$\left.\begin{aligned}ix_1+x_2&=0\\ -x_1+ix_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}ix_1&=-x_2\\ x_1&=ix_2\end{aligned}\right\}.$$

Άρα ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα $E$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_1=i$ είναι το $X_1=\begin{bmatrix}-1\\ i\end{bmatrix}$. Επίσης όλα τα πολλαπλάσια αυτού είναι χαρακτηριστικά διανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1=i$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας, το Θεώρημα **Cayley**[3] **- Hamilton**[4]**.**

**<u>Θεώρημα 1<sup></sup></u>** **(Cayley - Hamilton):** Κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου.

[3] Cayley, Arthur (1821 – 1895) Άγγλος μαθηματικός.
[4] Hamilton, William (1805 – 1865) Ιρλανδός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος.

Στο παράδειγμα (α) πιο πάνω, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\lambda^2-3\lambda-4=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton θα πρέπει να έχουμε:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}^2-3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 9 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7-3-4 & 6-6-0\\ 9-9-0 & 10-6-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε τη στενή σχέση των ιδιοτιμών και των χαρακτηριστικών πολυωνύμων ενός πίνακα.

Επίσης ισχύει και το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**<u>Θεώρημα 2$^{o}$</u> :** Έστω ένας $(n\times n)$ πίνακας $A$ με στοιχεία πραγματικούς (ή μιγαδικούς) αριθμούς. Μια σταθερά $\lambda\in\mathbb{R}$ ή ($\lambda\in\mathbb{C}$) είναι ιδιοτιμή του $A$ αν και μόνον αν η $\lambda$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A$.

## 3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Με τη χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός τετραγωνικού πίνακα $A$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα $A^{-1}$, μέσω του ακόλουθου θεωρήματος.

**<u>Θεώρημα 3$^{o}$</u>:** Αν ένας $(n\times n)$ πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1}=-\left(\frac{a_1}{a_0}\cdot I+\frac{a_2}{a_0}\cdot A+\cdots+\frac{a_n}{a_0}\cdot A^{n-1}\right),$$

όπου $\chi(\lambda)=\left|A-\lambda\cdot I\right|=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n,\ \ a_0=|A|$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας των παρακάτω, με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

$$\text{α)}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{β)}\quad A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

**<u>Λύση</u>:** α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι:

$$\chi(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left[(2-\lambda)\lambda(1-\lambda)-6\right]$$

$$=-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8.$$

Η ορίζουσα του $A$ είναι:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-8, \text{ δηλαδή } \quad a_0=-8.$$

Αυτό βέβαια είναι προφανές και από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ότι δηλαδή $a_0=-8$. Επίσης $a_1=-2,\ a_2=5$ και $a_3=-1$.

$$\text{Άρα}\qquad A^{-1}=-\left(\frac{a_1}{a_0}\cdot I+\frac{a_2}{a_0}\cdot A+\frac{a_3}{a_0}\cdot A^2\right)$$

$$=-\frac{-2}{-8}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\frac{5}{-8}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}-\frac{-1}{-8}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}-\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{8} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{10}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & \frac{10}{8} & 0 \\ \frac{10}{8} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{10}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & -\frac{4}{8} & 0 \\ -\frac{6}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{2}{8}+\frac{10}{8}-\frac{10}{8} & -\frac{5}{8}+\frac{1}{8} & \frac{15}{8}-\frac{9}{8} \\ 0 & -\frac{2}{8}+\frac{10}{8}-\frac{4}{8} & 0 \\ \frac{10}{8}-\frac{6}{8} & \frac{5}{8}-\frac{1}{8} & -\frac{2}{8}+\frac{5}{8}-\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι:

$$\chi(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{6}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)=\lambda^2-\frac{5}{12}\lambda+\frac{1}{24}.$$

Άρα $a_0 = \frac{1}{24}$, $a_1 = -\frac{5}{12}$, $a_2 = 1$ και ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$A^{-1} = -\left(\frac{a_1}{a_0}\cdot I + \frac{a_2}{a_0}\cdot A\right)$$

$$= 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 24\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10-6 & -9 \\ 0 & 10-4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

## 3.3 ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

**Ορισμός:** Έστω δυο τετραγωνικοί πίνακες $A$ και $B$, για τους οποίους υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$, τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$, τότε λέμε ότι ο πίνακας $B$ είναι **όμοιος (equivalent matrices)** με τον πίνακα $A$, ή ότι οι δυο πίνακες $A$ και $B$ είναι όμοιοι.

**Θεώρημα 4$^{o}$:** Έστω ένας $(n\times n)$ πίνακας $A$ με στοιχεία πραγματικούς (ή μιγαδικούς) αριθμούς. Μια σταθερά $\lambda\in\mathbb{R}$ ή ($\lambda\in\mathbb{C}$) είναι ιδιοτιμή του $A$ αν και μόνον αν η $\lambda$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A$.

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε και τα εξής αποτελέσματα.

**Πόρισμα 1:** Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(\lambda)$ ενός $(n\times n)$ πίνακα $A$ είναι γινόμενο διαφορετικών παραγόντων, δηλαδή

$$\chi(\lambda) = (a_1-\lambda)\cdot(a_2-\lambda)\cdots(a_n-\lambda),$$

όπου $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι ρίζες του $\chi(\lambda)$ διάφορες μεταξύ τους, τότε ο πίνακας $A$ είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, του οποίου η κύρια διαγώνιος αποτελείται από τα $a_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Το <u>Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας</u> λέει ότι κάθε πολυώνυμο στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών έχει τουλάχιστον μια ρίζα. Αυτό, μαζί με το παραπάνω θεώρημα μας δίνουν το ακόλουθο.

**<u>Πόρισμα 2</u>:** Κάθε $(n \times n)$ πίνακας $A$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.

**<u>Θεώρημα 5<sup></sup></u>**

**<u>Θεώρημα $5^{\text{o}}$</u>:** Δυο όμοιοι πίνακες $A$ και $B$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και ακόμη $|A| = |B|$. Και κατά συνέπεια, έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

**<u>Ορισμός</u>:** Ένας $(n \times n)$ πίνακας $A$ λέμε ότι είναι **διαγωνοποιήσιμος** όταν είναι όμοιος προς ένα διαγώνιο πίνακα.

**<u>Ορισμός</u>:** Τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, ..., X_k$ ενός πίνακα ονομάζονται <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u> αν για κάθε $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ (ή $\in \mathbb{C}$), ισχύει το εξής:

$$c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + ... + c_k \cdot X_k = \mathrm{O} \;\Rightarrow\; c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 .$$

**<u>Θεώρημα $6^{\text{o}}$</u>:** Ένας $(n \times n)$ πίνακας $A$ με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς είναι διαγωνοποιήσιμος, αν και μόνον αν, έχει $n$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Ο πίνακας $P$, της σχέσης $B = P^{-1}AP$, όπου ο $B$ είναι όμοιος προς τον $A$, έχει στήλες τα $n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $A$ και επί πλέον ισχύει:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

όπου $\lambda_i$, $i = 1, 2, ..., n$ είναι οι ιδιοτιμές του $A$.

**<u>Θεώρημα $7^{\text{o}}$</u>:** Αν ένας $(n \times n)$ πίνακας $A$ με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς έχει $n$ διαφορετικές ανά δυο ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για να διαγωνοποιηθεί ένας $(n \times n)$ πίνακας $A$ κάνουμε τα ακόλουθα:

1. Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του δοθέντος πίνακα.

2. Εξετάζουμε αν ο πίνακας έχει $n$ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Σε περίπτωση που αυτό συμβαίνει, σχηματίζουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P$, χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα του $A$. Αν υπάρχουν $k \prec n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $A$, τότε αυτός δεν είναι διαγωνοποιήσιμος και σταματάμε εκεί.

**<u>Παραδείγματα</u>:** α) Να δειχθεί ότι ο παρακάτω $(3\times 3)$ πίνακας δε διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$, αλλά διαγωνοποιείται στο $\mathbb{C}$. Να βρεθεί ο $B = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**<u>Λύση</u>:** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\big[(2-\lambda)(-2-\lambda)+5\big]$$

$$= (3-\lambda)\left(\lambda^2+1\right).$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τις εξής ρίζες:

$$\chi(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 3,\;\; \lambda_2 = i \;\text{ και }\; \lambda_3 = -i.$$

Συνεπώς, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, ο πίνακας $A$ έχει μόνον μια ιδιοτιμή, τη $\lambda_1 = 3$ και έτσι δεν είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{R}$.

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, όμως, ο πίνακας $A$ έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, ήτοι τις $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = i$ και $\lambda_3 = -i$. Άρα είναι διαγωνοποιήσιμος στο $\mathbb{C}$.

Τέλος ο $A$ είναι όμοιος προς τον

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

β) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

διαγωνοποιείται στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί ο αντιστρέψιμος πίνακας $P$, για τον οποίον $B = P^{-1}AP$. Να επαληθευθεί ότι ο $B = P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος και η κύρια διαγώνιός του αποτελείται από τις ιδιοτιμές του $A$.

**<u>Λύση</u>:** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-5-\lambda)\big[(4-\lambda)(-5-\lambda)+18\big]$$

$$= -(\lambda+5)\left(\lambda^2+\lambda-2\right)$$

$$= -(\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 1$. Συνεπώς ο $A$ διαγωνοποιείται.

Τώρα βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του $A$.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -5$ λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\left(A-\lambda_1 I\right)X_1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 &= 0 \\ -3x_1 \quad\quad &= 0 \\ -3x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -5$ είναι τα $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\left(A-\lambda_2 I\right)X_2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 \quad\quad &= 0 \\ -3x_1 - 3x_2 \quad\quad &= 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= -x_2 \end{aligned}\right\}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ είναι τα $X_2 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$.

(iii) Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$ λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\left(A-\lambda_3 I\right)X_3 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3x_1+6x_2 \quad &= 0 \\ -3x_1-6x_2 \quad &= 0 \\ -3x_1-6x_2-6x_3 &= 0 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\\a\end{aligned}}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=1$ είναι τα $X_3=\begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Θέτοντας $x_3=1$ και $x_2=1$ έχουμε τον πίνακα $P$:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Για να επαληθεύσουμε ότι ο $B=P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος και η κύρια διαγώνιός του αποτελείται από τις ιδιοτιμές του $A$, βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα $P^{-1}$.

$$|P|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $P$ είναι:

$$\chi(\lambda)=|P-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+1.$$

Οπότε $a_0=1$, $a_1=-3$, $a_2=1$ και $a_3=-1$.

$$P^{-1}=-\left(\frac{a_1}{a_0}\cdot I+\frac{a_2}{a_0}\cdot P+\frac{a_3}{a_0}\cdot P^2\right)$$

$$=3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-0-2&0+1+1&0+2-1\\0-0+1&3-1+0&0-1+1\\0-1+0&0+1-2&3-0-3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Τώρα $B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&-5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-4&-10&-5\\-2&-4&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5\cdot0-10\cdot0-5\cdot1&5-10+5&10-10-5\cdot0\\-2\cdot0-4\cdot0+0\cdot1&2-4-1\cdot0&4-4+0\cdot0\\-1\cdot0-1\cdot0+0\cdot1&1-1-1\cdot0&2-1+0\cdot0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-5&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

γ) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

**Λύση:** Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι:

$$\chi(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -6 & -6\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 3 & -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-6 & -6\\ -6 & -4-\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-6 & -6\\ 4-\lambda & 2\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)\left[(4-\lambda)(-4-\lambda)+12\right]+(24+6\lambda-36)+3(12-6\lambda)$$

$$=(5-\lambda)\left(\lambda^2-4\right)-12\lambda+24$$

$$=(5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)-12(\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-2)\left(\lambda^2+3\lambda-2\right)$$

$$=-(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1).$$

Άρα $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=\lambda_3=2$ (διπλή ρίζα), οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ δεν είναι διαφορετικές ανά δυο και πρέπει έτσι να ελέγξουμε αν υπάρχουν τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα αυτού.

(i) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$(A-\lambda_1 I)X_1=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\quad \left.\begin{matrix}4x_1-6x_2-6x_3=0\\ -x_1+3x_2+2x_3=0\\ 3x_1-6x_2-5x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=x_3\\ x_2=x_2\\ x_3=-3x_2\end{matrix}\right\}.$$

Οπότε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ είναι τα $X_1=\begin{bmatrix}-3x_2\\ x_2\\ -3x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -3\end{bmatrix}$.

(ii) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$(A-\lambda_2 I)X_2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{array}\right\}.$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι τα

$$X = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αν θέσουμε $x_2 = x_3 = 1$, παίρνουμε τρία ιδιοδιανύσματα, ήτοι τα $X_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, αφού η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 3 - 1 = -1 \neq 0.$$

Άρα $c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 = \mathrm{O} \ \Rightarrow \ c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

## 3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Στην περίπτωση ενός διαγωνοποιήσιμου $(n \times n)$ πίνακα $A$, η νιοστή δύναμη αυτού βρίσκεται εύκολα από τον πίνακα $B = P^{-1}AP$.

Από τη σχέση αυτή έχουμε:

$$B^n = \left(P^{-1}AP\right)^n \;\Rightarrow\; B^n = \underbrace{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}_{n-\phi o\rho\varepsilon\varsigma}$$

$$\Rightarrow\; B^n = P^{-1}A^nP$$

$$\Rightarrow\; A^n = PB^nP^{-1}.$$

**<u>Παραδείγματα</u>:** α) Να υπολογιστεί ο $A^5$ του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

**<u>Λύση</u>:** Από το παράδειγμα (β) της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\; P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \;\text{και}\; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οπότε

$$B^5 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} (-5)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & (1)^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3.125 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι

$$A^5 = PB^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3.125 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 32 & -2 \\ 0 & -32 & 1 \\ -3.125 & 32 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 34 & 66 & 0 \\ -34 & -66 & 0 \\ -3.093 & -6186 & -3.125 \end{bmatrix}.$$

β) Να υπολογιστεί ο $A^n$ του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

**<u>Λύση</u>:** Από το παράδειγμα (α) της παραγράφου 3.1, οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Οπότε ο πίνακας $P$ είναι:

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ και ο αντίστροφός του είναι:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Τώρα $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{bmatrix} (4)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$.

Άρα $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (4)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

## 3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων.

α) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$,

γ) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$, δ) $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$.

2. Από τους πιο κάτω πίνακες ποιος είναι διαγωνοποιήσιμος και γιατί;

α) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$,

γ) $\Gamma=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, δ) $K=\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Για εκείνους τους πίνακες που διαγωνοποιούνται, να βρεθεί ο πίνακας $B$ και η τέταρτη δύναμη του αρχικού.

3. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος των πιο κάτω πινάκων με τη χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

α) $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, β) $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$,

γ) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 8\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, δ) $B=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -3\\ 10 & -7 & 6\\ -8 & -6 & 5\end{bmatrix}$.

4. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{ο}$

## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ (VECTOR SPACES)

### 4.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο όλων των $n-$ άδων της μορφής: $r=(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_n)$, όπου $r_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,n$, ονομάζεται $n-$ **χώρος (space)** και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$.

Κάθε στοιχείο του χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **σημείο** ή **διάνυσμα**, οι δε πραγματικοί αριθμοί $r_i$ ονομάζονται **συντεταγμένες (coordinates)** ή **συνιστώσες** του διανύσματος $r$.

Για παράδειγμα τα $(2,\ 1,\ 5)$ και $(3,\ 2,\ 1)$ είναι διανύσματα, στοιχεία του χώρου $\mathbb{R}^3$. Τα δε $(2,\ 5)$ και $(3,\ 1)$ είναι σημεία του χώρου $\mathbb{R}^2$.

**Ορισμός:** Δυο διανύσματα $r$ και $t$ είναι ίσα μεταξύ τους και γράφουμε $r=t$, αν έχουν τον ίδιο αριθμό συντεταγμένων, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο χώρο και, αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες είναι ίσες.

Παράδειγμα: Έστω ότι $(x-y,\ x+y,\ z-5,\ w-1)=(-4,\ 2,\ -3,\ 7)$, τότε τα διανύσματα αυτά ανήκουν στο χώρο $\mathbb{R}^4$ και από το ορισμό της ισότητας διανυσμάτων έχουμε:

$$\begin{aligned} x-y&=-4\\ x+y&=\ \ 2\\ z-5&=-3\\ w-1&=\ \ 7. \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε: $x=-1,\ \ y=3,\ \ z=2$ και $w=8$.

### 4.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ ΕΠΙ ΕΝΑΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Έστω δυο διανύσματα $r$ και $t$ του χώρου $\mathbb{R}^n$:

$$r=(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_n)\ \text{ και }\ t=(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n),$$

το <u>άθροισμα</u> $r+t$ είναι ένα άλλο διάνυσμα, του χώρου $\mathbb{R}^n$, που προκύπτει αν προσθέσουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες, ήτοι:

$$r+t=\left(r_1+t_1,\ \ r_2+t_2,\ \ ...,\ \ r_n+t_n\right).$$

Επίσης, το <u>γινόμενο</u> ενός πραγματικού αριθμού $k$ επί το διάνυσμα $r$, είναι ένα άλλο διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^n$, και δίνεται από τη σχέση:

$$kr=\left(kr_1,\ \ kr_2,\ \ ...,\ \ kr_n\right).$$

Το διάνυσμα $\left(0,\ 0,\ ...,\ 0\right)\in\mathbb{R}^n$, συμβολίζεται με $0$ και ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα (zero vector)** (ή ουδέτερο στοιχείο του χώρου $\mathbb{R}^n$).

Τέλος, ορίζονται τα $-r=-1r$ και $r-t=r+\left(-t\right)$.

Το άθροισμα διανυσμάτων με διαφορετικό αριθμό συνιστωσών δεν ορίζεται, δηλαδή δεν προστίθενται στοιχεία διαφορετικών χώρων.

**<u>Παράδειγμα</u>:** Για τα διανύσματα $r=\left(-1,\ 3,\ 2,\ 6\right)$, $t=\left(4,\ 7,\ -3,\ 10\right)$ και του πραγματικού αριθμού $k=9$, να υπολογιστούν τα $r+t$, $kr$, $kt$ και $3r-2t$.

**<u>Λύση</u>:** $r+t=\left(-1,\ 3,\ 2,\ 6\right)+\left(4,\ 7,\ -3,\ 10\right)$

$$=\left(-1+4,\ \ 3+7,\ \ 2-3,\ \ 6+10\right)$$

$$=\left(3,\ 10,\ -1,\ 16\right).$$

$$kr=9\left(-1,\ 3,\ 2,\ 6\right)$$

$$=\left(-9,\ 27,\ 18,\ 54\right).$$

$$kt=9\left(4,\ 7,\ -3,\ 10\right)$$

$$=\left(36,\ 63,\ -27,\ 90\right).$$

$$3r-2t=3\left(-1,\ 3,\ 2,\ 6\right)-2\left(4,\ 7,\ -3,\ 10\right)$$

$$=\left(-3,\ 9,\ 6,\ 18\right)-\left(8,\ 14,\ -6,\ 20\right)$$

$$=\left(-11,\ -5,\ 0,\ -2\right).$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει τις βασικές ιδιότητες πράξεων μεταξύ διανυσμάτων στο χώρο $\mathbb{R}^n$.

**<u>Θεώρημα 1</u>:** Για οποιαδήποτε διανύσματα $r,\ t$ και $s$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $k_1,\ k_2$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $(r+t)+s = r+(t+s)$,

(ii) $r+0 = 0+r = r$,

(iii) $r+(-r) = 0$,

(iv) $r+t = t+r$,

(v) $k_1(r+t) = k_1 r + k_1 t$,

(vi) $(k_1+k_2)r = k_1 r + k_2 r$,

(vii) $(k_1 k_2)r = k_1(k_2 r)$,

(viii) $1r = r1 = r$.

Αν $r,\ t \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $r = kt$ για κάποιο $k \in \mathbb{R}$, τότε τα διανύσματα $r$ και $t$ έχουν την ίδια κατεύθυνση, αν $k \succ 0$, ενώ αν $k \prec 0$, τότε έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

## 4.3 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω ότι $r$ και $t$ είναι διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^n$, με συνιστώσες:

$$r = (r_1,\ r_2,\ ...,\ r_n) \text{ και } t = (t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n),$$

το **εσωτερικό γινόμενο(inner product)** των $r$ και $t$ συμβολίζεται με $r \cdot t$ και είναι ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συνιστωσών, δηλαδή:

$$r \cdot t = r_1 t_1 + r_2 t_2 + \cdots + r_n t_n .$$

Στην περίπτωση που το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ισούται με μηδέν, δηλαδή $r \cdot t = 0$, τότε τα δυο διανύσματα είναι **ορθογώνια (orthogonal)** (ή κάθετα) μεταξύ τους και αυτό συμβολίζεται με $r \perp t$.

**<u>Παράδειγμα</u>:** Για τα διανύσματα $r = (1,\ -2,\ 3,\ 4)$, $t = (4,\ 7,\ 2,\ -3)$ και $s = (5,\ -4,\ 5,\ -7)$ να βρεθούν τα εσωτερικά γινόμενα $r \cdot t$, $t \cdot s$ και $r \cdot s$. Είναι κάποια από αυτά ορθογώνια μεταξύ τους;

**<u>Λύση</u>:** $r \cdot t = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 4 - 14 + 6 - 12 = -16$.

$$t \cdot s = 4 \cdot 5 + 7 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-7) = 20 - 28 + 10 + 21 = 23.$$

$$r \cdot s = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-7) = 5 + 8 + 15 - 28 = 0.$$

Άρα τα διανύσματα $r$ και $s$ είναι ορθογώνια.

**<u>Θεώρημα 2</u>:** Για οποιαδήποτε διανύσματα $r,\ t$ και $s$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ και οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $k$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $(r + t) \cdot s = r \cdot s + t \cdot s$,

(ii) $(kr) \cdot t = k(r \cdot t)$,

(iii) $r \cdot t = t \cdot r$,

(iv) $r \cdot r \geq 0$ και $r \cdot r = 0$ αν και μόνον αν $r = 0$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, πολλαπλασιασμού αυτών επί έναν πραγματικό αριθμό και του εσωτερικού γινομένου, ονομάζεται **Ευκλείδειος $n-$ χώρος (Euclidean n-space)**.

## 4.4 ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$

Έστω ότι $r$ και $t$ είναι διανύσματα στο χώρο $\mathbb{R}^n$, με συνιστώσες:

$$r = (r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n) \text{ και } t = (t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n),$$

η **απόσταση (distance)** μεταξύ των δυο αυτών σημείων, συμβολίζεται με $d(r,s)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$d(r,s)=\sqrt{(r_1-t_1)^2+(r_2-t_2)^2+\cdots+(r_n-t_n)^2}\,.$$

Το **μέτρο (norm)** του διανύσματος $r$, συμβολίζεται με $\|r\|$ και είναι η μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου $r\cdot r$, ήτοι:

$$\|r\|=\sqrt{r\cdot r}=\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}+\cdots+r_n^{\,2}}\,.$$

Από το θεώρημα 2 πιο πάνω, $r\cdot r\ge 0$ και έτσι, η τετραγωνική ρίζα που δίνει το μέτρο του διανύσματος $r$, υπάρχει.

Ακόμη, παρατηρούμε ότι

$$\|r-t\|=\sqrt{(r-t)\cdot(r-t)}=\sqrt{(r_1-t_1)^2+(r_2-t_2)^2+\cdots+(r_n-t_n)^2}\;\Rightarrow$$

$$d(r,t)=\|r-t\|.$$

**Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί η απόσταση, καθώς και τα μέτρα των σημείων $r=(2,\ -1,\ 5,\ 1)$ και $t=(4,\ 1,\ -7,\ 0)$.

**Λύση:** Έχουμε ότι:

$$d(r,s)=\sqrt{(r_1-t_1)^2+(r_2-t_2)^2+(r_3-t_3)^2+(r_4-t_4)^2}$$

$$=\sqrt{(2-4)^2+(-1-1)^2+(5+7)^2+(1-0)^2}$$

$$=\sqrt{4+4+144+1}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}\,.$$

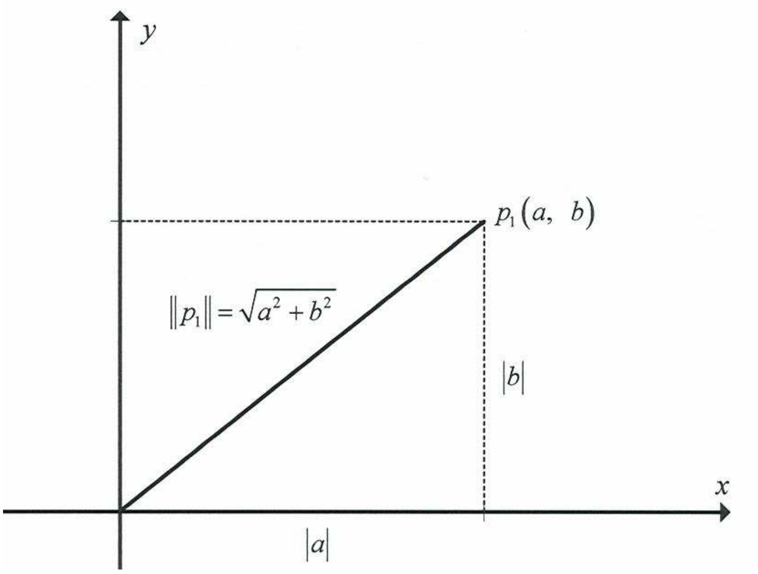
$$\|r\|=\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}+r_3^{\,2}+r_2^{\,2}}=\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{31}\,.$$

$$\|t\|=\sqrt{t_1^{\,2}+t_2^{\,2}+t_3^{\,2}+t_2^{\,2}}=\sqrt{4^2+1^2+(-7)^2+0^2}=\sqrt{66}\,.$$

Για το επίπεδο $\mathbb{R}^2$, αν πάρουμε δυο τυχαία σημεία, $p_1=(a,\ b)$ και $p_2=(c,\ d)$, τότε το μέτρο του σημείου $p_1$ είναι:

$$\|p_1\|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

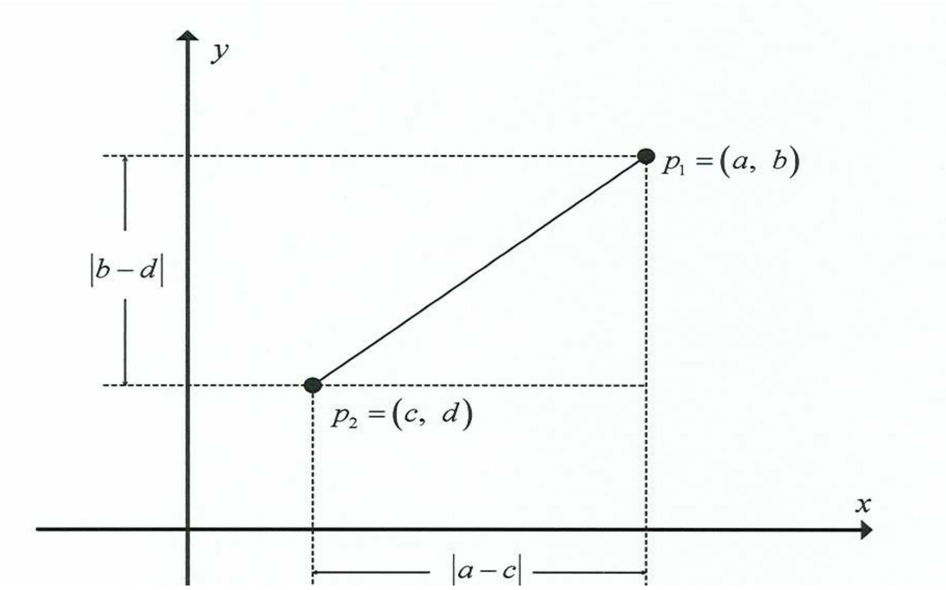
το οποίο αντιστοιχεί στο γνωστό, Ευκλείδειο μήκος του διανύσματος από το $(0,0)$, δηλαδή το σημείο τομής των αξόνων $x,y$ έως το σημείο $p_1$. (Βλ. σχήμα 1).




Σχήμα 1

Επίσης, η απόσταση μεταξύ των δυο σημείων είναι:

$$d(p_1,p_2)=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ ,$$




Σχήμα 2

η οποία αντιστοιχεί στη συνήθη, Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των δυο σημείο $p_1$ και $p_2$. (Βλ. σχήμα 2).

Ένα διάνυσμα, $e$, του οποίου το μέτρο είναι $\|e\|=1$, ονομάζεται **μοναδιαίο (unit vector)**. Για παράδειγμα τα διανύσματα $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, είναι μοναδιαία διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$. Τα δε $(0,\ 1,\ 0,\ 0)$ και $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$ είναι μοναδιαία διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^4$.

Για κάθε μη – μηδενικό διάνυσμα $r\in \mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $e_r=\dfrac{r}{\|r\|}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο έχει την ίδια κατεύθυνση με το $r$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως **Cauchy**[5] **– Schwarz**[6] **ανισότητα**.

**<u>Θεώρημα 3</u>** (Cauchy – Schwarz): Για οποιαδήποτε διανύσματα $r,\ t\in \mathbb{R}^n$, ισχύει η ανισότητα:

$$|r\cdot t|\le \|r\|\|t\|.$$

Η γωνία που σχηματίζουν δυο μη – μηδενικά, τεμνόμενα διανύσματα, $r$ και $t$, μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση:

$$cos\theta=\frac{r\cdot t}{\|r\|\|t\|}.$$

Παρατηρούμε εδώ πως αν $r\cdot t=0$, τότε $cos\theta=0$ που σημαίνει ότι $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Δηλαδή τα δυο διανύσματα είναι ορθογώνια, πράγμα που επιβεβαιώνει και τον ορισμό που δόθηκε παραπάνω.

## 4.5 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με $\mathbb{C}$, αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη $(a,\ b)$, όπου $a,\ b\in \mathbb{R}$.

Ισότητα μεταξύ μιγαδικών αριθμών, καθώς επίσης και οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ορίζονται στο σύνολο αυτό ως εξής:

---

[5] Cauchy, Augustin L. (1794 – 1857) Γάλλος μαθηματικός.
[6] Schwarz, Herman A. (1843 – 1921) Γερμανός μαθηματικός.

- $(a,\ b)=(c,\ d)$ αν και μόνον αν $a=c$ και $b=d$.
- $(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$.
- $(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$.

Αφού οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στην αντιστοίχιση:

$$(a,\ 0)+(b,\ 0)=(a+b,\ 0) \text{ και } (a,\ 0)(b,\ 0)=(ab,\ 0),$$

γίνεται μεταξύ πραγματικών αριθμών, κάθε πραγματικός αριθμός $a$ προσδιορίζεται από τον μιγαδικό αριθμό $(a,\ 0)$. Συνεπώς το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ θεωρείται ως ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ο μιγαδικός αριθμός $(0,\ 1)$ συμβολίζεται με $i$ και έχει την πολύ σημαντική ιδιότητα ότι

$i^2=ii=(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1$, δηλαδή $i^2=-1$ ή $\sqrt{-1}=i$.

Ακόμη, αφού $(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)$ και $(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)$ έχουμε:

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(b,\ 0)(0,\ 1)=a+bi.$$

Είναι βολικότερο να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $z=a+bi$ για ένα μιγαδικό αριθμό, $z$ αντί του $z=(a,\ b)$, όταν κάνουμε πράξεις.

Ο αριθμός $a$ ονομάζεται **πραγματικό μέρος (real part)** του μιγαδικού αριθμού $z$ και ο αριθμός $b$ ονομάζεται **φανταστικό μέρος (imaginary part)** αυτού.

**Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί το άθροισμα και το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών:

α) $(a,\ b)$ και $(c,\ d)$.

β) $(2,\ -3)$ και $(-4,\ 5)$.

**Λύση:** α) $(a,\ b)=a+bi$ και $(c,\ d)=c+di$, οπότε

(i) $(a,\ b)+(c,\ d)=a+bi+c+di$

$$= (a+c) + (b+d)i.$$

(ii) $(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2$

$$= (ac-bd) + (bc+ad)i.$$

β) $(2, \ -3) = 2-3i$ και $(-4, \ 5) = -4+5i$, οπότε

(i) $(2, \ -3) + (-4, \ 5) = (2-4) + (-3+5)i$

$$= -2+2i.$$

(ii) $(2-3i)(-4+5i) = \left[2(-4)-(-3)5\right] + \left[(-3)(-4)+2\cdot 5\right]i$

$$= 7+22i.$$

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = (a, \ b) = a+bi$ υπάρχει ένας άλλος μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = a-bi$, ο οποίος ονομάζεται **συζυγής (conjugate)** του αριθμού $z$.

Για ένα μιγαδικό αριθμό $z = a+bi$ και τον συζυγή αυτού ισχύουν τα ακόλουθα:

- $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$.
- Αν $z \neq 0$, τότε $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}i$,
- $\dfrac{w}{z} = wz^{-1}, \ \ w \in \mathbb{C}$,
- $-z = -1z$ και $w - z = w + (-z), \ \ w \in \mathbb{C}$.

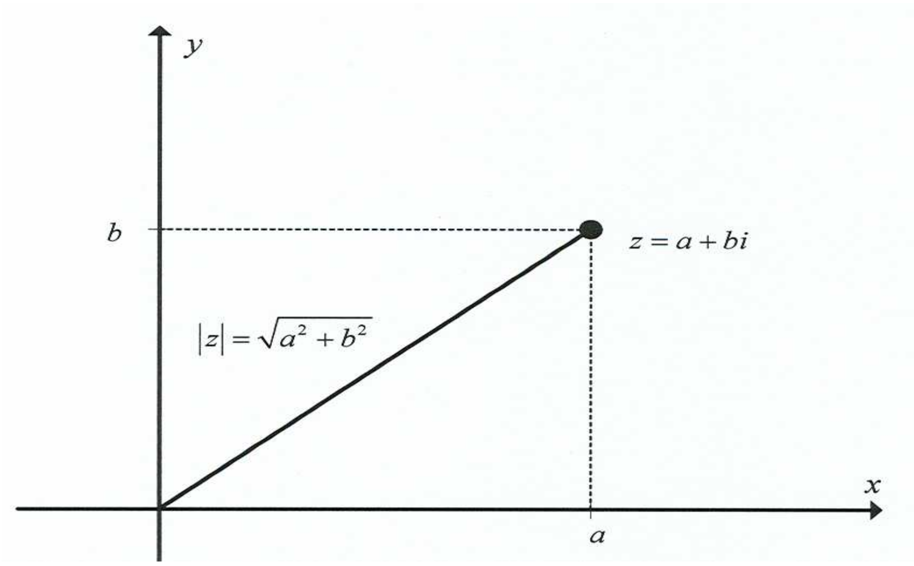
**<u>Παράδειγμα</u>:** Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z = 3-2i$ και $w = 5+6i$ να υπολογιστεί ο συζυγής τους και το πηλίκο $\dfrac{w}{z}$.

**<u>Λύση</u>:** $\overline{z} = \overline{3-2i} = 3+2i$, $\overline{w} = \overline{5+6i} = 5-6i$.

$$\frac{w}{z} = wz^{-1} = w\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = (5+6i)\frac{3+2i}{3^2+2^2}$$

$$= \frac{(5+6i)(3+2i)}{13} = \frac{3}{13} + \frac{28}{13}i\,.$$

Όπως ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα σημείο πάνω σε μια ευθεία, την οποία ονομάζουμε ευθεία των πραγματικών αριθμών, έτσι και ένας μιγαδικός αριθμός αναπαρίσταται από ένα σημείο στο επίπεδο. Για την ακρίβεια το σημείο $(a,\ b)$ αναπαριστά τον μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$, του οποίου η απόλυτος τιμή, $|z|$, ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ του $z$, δηλαδή του σημείου $(a,\ b)$ και του σημείου τομής των αξόνων $x, y$: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. (Βλέπε σχήμα 3).




Σχήμα 3

Να σημειώσουμε εδώ, ότι το μέτρο του διανύσματος $(a,\ b)$ είναι ίσο με την $|z|$ και επί πλέον, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

## 4.6 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{C}^n$

Το σύνολο όλων των $n-$ άδων της μορφής: $(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$, όπου $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ονομάζεται **μιγαδικός** $n-$ **χώρος (Complex** $n-$**space)** και συμβολίζεται με $\mathbb{C}^n$. Όπως και για το χώρο $\mathbb{R}^n$, τα στοιχεία του χώρου $\mathbb{C}^n$ ονομάζονται **σημεία (points)** ή **διανύσματα (vectors)**, οι δε μιγαδικοί αριθμοί, τα στοιχεία του χώρου $\mathbb{C}$ ονομάζονται **συντεταγμένες** ή **συνιστώσες** του διανύσματος.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού διανύσματος επί ένα μιγαδικό αριθμό, στο χώρο $\mathbb{C}^n$, ορίζονται ως εξής:

$$(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)+(w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_n)=(z_1+w_1,\ z_2+w_2,\ \dots,\ z_n+w_n),$$

$$z(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)=(zz_1,\ zz_2,\ \dots,\ zz_n),$$

όπου $z,\ z_i,\ w_i \in \mathbb{C}$.

Έστω ότι $u=(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)$ και $v=(w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_n)$ είναι τυχαία διανύσματα του χώρου $\mathbb{C}^n$, τότε, το εσωτερικό γινόμενο, $u\cdot v$, ορίζεται ως εξής:

$$u\cdot v = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + \cdots + z_n\overline{w}_n .$$

Σε περίπτωση που $w_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$, τότε $w_i=\overline{w}_i$ και το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο ταυτίζεται με αυτό των διανυσμάτων στο χώρο $\mathbb{R}^n$.

Το μέτρο ενός διανύσματος $u=(z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)$ του χώρου $\mathbb{C}^n$, ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \cdots + z_n\overline{z}_n}$$

$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} .$$

Τόσο το εσωτερικό γινόμενο $u\cdot u$, όσο και το μέτρο $\|u\|$ είναι πραγματικοί, μη - αρνητικοί αριθμοί, όταν $u\neq 0$ και $0$, όταν $u=0$.

Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, πολλαπλασιασμού αυτών επί ένα μιγαδικό αριθμό και του εσωτερικού γινομένου, ονομάζεται **μιγαδικός Ευκλείδειος $n-$ χώρος (Complex Euclidean $n-$space).**

**Παράδειγμα:** Για τα διανύσματα του χώρου $\mathbb{C}^3$, $u=(3+5i,\ 4-2i,\ 2)$ και $v=(2-3i,\ 2i,\ 4+3i)$, να υπολογιστούν:

α) $u+v$, β) $3i\,u$, γ) $u\cdot v$, δ) $u\cdot u$ και ε) $\|v\|$.

**<u>Λύση</u>:** α) $u+v=\left(3+5i,\ \ 4-2i,\ \ 2\right)+\left(2-3i,\ \ 2i,\ \ 4+3i\right)$

$$=\left(5+2i,\ \ 4,\ \ 6+3i\right).$$

β) $3i\ u=3i\left(3+5i,\ \ 4-2i,\ \ 2\right)=\left(-15+9i,\ \ 6+12i,\ \ 6i\right)$.

γ) $u\cdot v=\left(3+5i\right)\overline{\left(2-3i\right)}+\left(4-2i\right)\overline{\left(2i\right)}+\left(2\right)\overline{\left(4+3i\right)}$

$$=\left(3+5i\right)\left(2+3i\right)+\left(4-2i\right)\left(-2i\right)+\left(2\right)\left(4-3i\right)$$

$$=-5+5i.$$

δ) $u\cdot u=\left(3+5i\right)\overline{\left(3+5i\right)}+\left(4-2i\right)\overline{\left(4-2i\right)}+\left(2\right)\overline{\left(2\right)}$

$$=\left(3+5i\right)\left(3-5i\right)+\left(4-2i\right)\left(4+2i\right)+\left(2\right)\left(2\right)$$

$$=3^2+5^2+4^2+2^2+4=58.$$

ε) $\left\|v\right\|=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{\left(2-3i\right)\overline{\left(2-3i\right)}+\left(2i\right)\overline{\left(2i\right)}+\left(4+3i\right)\overline{\left(4+3i\right)}}$

$$=\sqrt{\left(2-3i\right)\left(2+3i\right)+\left(2i\right)\left(-2i\right)+\left(4+3i\right)\left(4-3i\right)}$$

$$=\sqrt{4+9+4+16+9}=\sqrt{42}.$$

## 4.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

α) $\left(3,\ -2,\ 5\right)+\left(-1,\ 3,\ -2\right)$, β) $\left(-13,\ -7,\ 25\right)+\left(-1,\ -8,\ -25,\ 0\right)$,

γ) $12\left(-1,\ -6,\ -10,\ 3,\ -2\right)$, δ) $\left(3,\ 5\right)\cdot\left(-1,\ -2\right)$.

2. Αν $r=\left(-4,\ 5,\ 1\right)$, $t=\left(2,\ -6,\ 3\right)$ και $s=\left(0,\ 8,\ -7\right)$ να υπολογιστούν τα εξής:

α) $3r-2t+4s$ β) $-r-t-s$, γ) $\left\|r\right\|-\left\|t\right\|+\left\|s\right\|$, δ) $s\cdot t$.

3. Να βρεθούν τα $x$, $y$ και $z$ αν α) $(x, \ -3) = (-2, \ x-y)$,

β) $(2, \ -4, \ 3) = x(1, \ 2, \ 3) + y(1, \ 0, \ 1) + z(0, \ 1, \ 2)$.

4. Να υπολογιστεί η απόσταση $d = (r, \ t)$ μεταξύ των διανυσμάτων:

α) $r = (1, \ 6)$, $t = (7, \ -4)$ β) $r = (3, \ -4, \ 5)$, $t = (6, \ 2, \ -3)$.

5. Να απλοποιηθούν τα ακόλουθα: α) $(3+5i)(2-4i)$, β) $(4-5i)^2$,

γ) $\dfrac{3+5i}{6-2i}$, δ) $(3+5i)+(-1-3i)$, ε) $\left(\dfrac{2}{3-i}\right)^2 - \dfrac{5}{-i+4}$.

6. Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z = 2-3i$ και $w = 5+4i$ να υπολογιστούν:

α) $z+w$, β) $zw$, γ) $\dfrac{z}{w}$, δ) $\bar{z}$ και $\bar{w}$, ε) $|z|$ και $|w|$.

7. Για τα διανύσματα $u = (3-2i, \ 4i, \ 2+5i)$ και $v = (3-2i, \ 4i, \ 2+5i)$, να υπολογιστούν:

α) $u+v$, β) $2i\,u$, γ) $(1-i)\,v$, δ) $(3+2i)\,u + (-1-4i)\,v$,

ε) $\|u\|+\|v\|$, στ) $u \cdot v$, ζ) $v \cdot u$, η) $\overline{u \cdot v}$, θ) $\overline{v \cdot u}$.

## 4.8 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με διανύσματα στους χώρους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ και είδαμε τις διάφορες ιδιότητες τους. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου, όπου ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές ισχύουν ως αξιώματα. Απαραίτητοι είναι επίσης και οι εξής συμβολισμοί:

$K$ θα είναι το σύνολο των μιγαδικών ή πραγματικών αριθμών,

$a, b$ ή $k$ στοιχεία του $K$,

$V$ ένας διανυσματικός χώρος,

$u, v, w$ στοιχεία του $V$.

Το σύμβολο $\forall$ σημαίνει *"για κάθε"*.

**<u>Ορισμός</u>:** Έστω ότι $V$ είναι ένα μη – κενό σύνολο και $u, v \in V$, στο οποίο ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των στοιχείων του, δηλαδή $u, v \in V$ καθώς και ο πολλαπλασιασμός $ku \in V,\ k \in K$. Τότε το σύνολο $V$ ονομάζεται **διανυσματικός χώρος επί του $K$ (vector space over *K*)** και τα στοιχεία αυτού ονομάζονται **διανύσματα (vectors)** αν ισχύουν τα εξής αξιώματα:

1. Για τυχαία διανύσματα $u, v, w \in V$, $(u+v)+w = u+(v+w)$.
2. Υπάρχει διάνυσμα $0 \in V$, που ονομάζεται <u>μηδενικό διάνυσμα</u>, για το οποίο ισχύει: $u + 0 = u,\ \forall u \in V$.
3. $\forall u \in V$ υπάρχει στοιχείο $-u \in V$, για το οποίο ισχύει: $u + (-u) = 0$.
4. $\forall u, v \in V$, $u + v = v + u$.
5. $\forall k \in K$ και $\forall u, v \in V$, $k(u+v) = kv + ku$.
6. $\forall a, b \in K$ και $\forall u \in V$, $(a+b)u = au + bu$.
7. $\forall a, b \in K$ και $\forall u \in V$, $(ab)u = a(bu)$.
8. Υπάρχει το <u>μοναδιαίο διάνυσμα</u> $1 \in V$ τέτοιο ώστε $1u = u,\ \forall u \in V$.

Από τα πιο πάνω αξιώματα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου.

**<u>Θεώρημα 4</u>:** Για ένα διανυσματικό χώρο επί του $K$ έχουμε:

(i) $\forall k \in K$ και $0 \in V$, $k0 = 0$.

(ii) $0 \in K$ και $\forall u \in V$, $0u = 0$.

(iii) Αν $ku = 0,\ k \in K$ και $u \in V$, τότε $k = 0$ ή $u = 0$.

(iv) $\forall k \in K$ και $\forall u \in V$, $(-k)u = k(-u) = -ku$.

**<u>Παραδείγματα</u>:** Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένα γνωστά, αλλά πολύ σημαντικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων.

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$), που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο, με τις πράξεις που ορίσαμε εκεί, αποτελεί ένα χαρακτηριστικό και σημαντικό παράδειγμα διανυσματικού χώρου, όπου $V = \mathbb{R}^n$ και $K = \mathbb{R}$ (ή $K = \mathbb{C}$).

2. Έστω ότι $V$ είναι το σύνολο όλων των $(m \times n)$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή $K = \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), τότε ο $V$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $K$ με τις πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ πινάκων και πολλαπλασιασμού αυτών επί ένα στοιχείο του $K$.

3. Αν $V$ είναι το σύνολο όλων των πολυωνύμων $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, όπου οι συντελεστές $a_i \in K$ (πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός), με τις πράξεις της πρόσθεσης πολυωνύμων και πολλαπλασιασμού αυτών επί μια σταθερά, είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $K$.

4. Έστω ότι $X$ είναι ένα μη – κενό σύνολο και $K$ όπως και πριν. Θεωρούμε το σύνολο $V$ όλων των συναρτήσεων από το σύνολο $X$ στο σύνολο $K$, όπου το άθροισμα δυο συναρτήσεων $f, g \in V$ είναι μια άλλη συνάρτηση $(f+g) \in V$, η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

και το γινόμενο μιας σταθεράς $k \in K$ επί μια συνάρτηση $f \in V$ είναι μια συνάρτηση, $kf \in V$, η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$(kf)(x) = kf(x),$$

τότε ο $V$ με τις παραπάνω πράξεις, είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $K$. Το μηδενικό διάνυσμα του χώρου αυτού είναι η συνάρτηση $0$, η οποία αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in X$ στο στοιχείο $0 \in K$, δηλαδή $0(x) = 0$, $\forall x \in X$. Ακόμη, $-f$ είναι η συνάρτηση εκείνη, για την οποία ισχύει:

$$(-f)(x) = -f(x), \ \forall x \in X.$$

## 4.9 ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Έστω ότι $V$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $K$ και $U$ ένα υποσύνολο του $V$, συμβολικά γράφουμε $U \subset V$, το σύνολο $U$ αποτελεί έναν **υποχώρο (subspace)** του $V$, αν το σύνολο αυτό είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $K$ με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού αυτών επί ένα στοιχείο του $K$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ορισμένα απλά κριτήρια ώστε ένα υποσύνολο $U \subset V$ να είναι υποχώρος του διανυσματικού χώρου $V$.

**Θεώρημα 5:** Ένα μη – κενό σύνολο $U \subset V$ είναι υποχώρος του διανυσματικού χώρου $V$ αν και μόνον αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $t, v \in U$, το άθροισμα $t + v \in U$.

(ii) Αν $v \in U$, τότε $kv \in U, \ \forall k \in K$.

Παραδείγματα: α) Το σύνολο $\{0\}$ καθώς και ο διανυσματικός χώρος $V$ αποτελούν υποχώρους του $V$.

β) Έστω ότι $V = \mathbb{R}^3$, τότε το σύνολο $U = \{(a, \ b, \ 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι ένας υποχώρος του $V$.

γ) Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων $A = (a_{ij})$, με $a_{ij} = a_{ji}, \ i, j = 1, 2, ..., n$ είναι ένας υποχώρος του διανυσματικού χώρου των $(n \times n)$ πινάκων.

δ) Έστω το ομογενές γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n = 0 \end{array},$$

το σύνολο $U$, όλων των λύσεων του συστήματος αυτού είναι ένας υποχώρος του $\mathbb{R}^n$.

Δε συμβαίνει το ίδιο, όμως, για το σύνολο των λύσεων ενός μη – ομογενούς συστήματος.

**<u>Θεώρημα 6</u>:** Έστω ότι $U_1,\ U_2,...,U_n$ είναι υποχώροι ενός διανυσματικού χώρου $V$, τότε η τομή $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ των υποχώρων αυτών είναι επίσης ένας υποχώρος του $V$.

**<u>Παράδειγμα</u>:** Έστω ότι $U_1$ και $U_2$ υποχώροι του διανυσματικού χώρου $V$, τότε, προφανώς, $0 \in U_1$ και $0 \in U_2$ λόγω του ότι οι $U_1$ και $U_2$ είναι διανυσματικοί χώροι και έτσι $0 \in U_1 \cap U_2$. Επίσης αν $u, v \in U_1 \cap U_2$, τότε ισχύει ότι: $u + v \in U_1$, $ku \in U_1,\ \forall k \in K$ και $u + v \in U_2,\ ku \in U_2,\ \forall k \in K$. Άρα $u + v \in U_1 \cap U_2$ και $ku \in U_1 \cap U_2,\ \forall k \in K$. Κατά συνέπεια η τομή των δυο υποχώρων $U_1 \cap U_2$ είναι επίσης υποχώρος του $V$.

## 4.10 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $v_1,\ v_2,...,v_n$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου $V$ επί του $K$, τότε οποιοδήποτε διάνυσμα του $V$ της μορφής:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n,\ k_i \in K,$$

ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός (linear combination)** των $v_1,\ v_2,...,v_n$.

**<u>Θεώρημα 7</u>:** Έστω $U$ ένας μη – κενός υποχώρος του $V$. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών, $L(U)$, των διανυσμάτων του $U$, είναι ένας υποχώρος του $V$ τέτοιος ώστε $U \subset L(U)$. Επί πλέον, αν $W$ είναι ένας άλλος υποχώρος του $V$ που περιέχει τον $U$, τότε $L(U) \subset W$.

Έτσι, ο $L(U)$ είναι ο μικρότερος υποχώρος του $V$, ο οποίος περιέχει τον $U$. Ονομάζεται δε ο υποχώρος που **παράγεται (generated)** (ή γεννάται) από τον $U$.

Ο υποχώρος $L(\varnothing) = \{0\}$.

**<u>Παραδείγματα</u>:** α) Τα διανύσματα $e_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$ και $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, αφού κάθε στοιχείο, $(a,\ b,\ c)$, του χώρου αυτού είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $e_i$, ήτοι:

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c) &= a(1,\ 0,\ 0) + b(0,\ 1,\ 0) + c(0,\ 0,\ 1) \\ &= ae_1 + be_2 + ce_3.\end{aligned}$$

β) Γενικεύοντας το (α) πιο πάνω, έχουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ γεννάται από τα διανύσματα:

$$e_1=(1,\ 0,\ 0,\ldots,0),\ e_2=(0,\ 1,\ 0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,\ 0,\ 0,\ldots,1).$$

γ) Τα πολυώνυμα $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ldots$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $V=L(1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ldots)$ όλων των πολυωνύμων, αφού κάθε πολυώνυμο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $1$ και δυνάμεων του $x$.

δ) Το διάνυσμα $s=(3,\ 9,\ -4,\ -2)$ στοιχείο του $\mathbb{R}^4$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $t_1=(1,\ -2,\ 0,\ 3)$, $t_2=(2,\ -1,\ 2,\ 1)$ και $t_3=(2,\ 3,\ 0,\ -1)$.

Για να ισχύει το παραπάνω, πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x,y$ και $z$, τέτοιοι ώστε: $s=xt_1+yt_2+zt_3$, δηλαδή

$$(3,\ 9,\ -4,\ -2)=x(1,\ -2,\ 0,\ 3)+y(2,\ -1,\ 2,\ 1)+z(2,\ 3,\ 0,\ -1)$$

ή

$$\left.\begin{aligned} x+2y+2z&=\ 3\\ -2x-y+3z&=\ 9\\ 2y\qquad &=-4\\ 3x+y-\ z&=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2z&=\ 7\\ -2x+3z&=\ 7\\ y&=-2\\ 3x-\ z&=\ 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=1\\ y&=-2\\ z&=3\end{aligned}\right\}.$$

Συνεπώς το διάνυσμα $s$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των $t_1,\ t_2$ και $t_3$: $s=t_1-t_2+3t_3$.

## 4.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γραφεί ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

2. Να γραφεί το πολυώνυμο $P(t)=t^2+4t-3$ ως γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $Q(t)=t+3,\ R(t)=2t^2-3t$ και $S(t)=t^2-2t+5$.

3. Να δειχθεί ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ γεννάται από τα διανύσματα: $r_1=(0,\ 0,\ 1),\ r_2=(0,\ 1,\ 2)$ και $r_3=(1,\ 2,\ 3)$.

4. Ποιες συνθήκες επί των $a,\ b$ και $c$ πρέπει να ικανοποιούνται ώστε το διάνυσμα $(a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3$ να ανήκει στον υποχώρο που γεννάται από τα διανύσματα: $r=(0,\ 3,\ -4),\ s=(1,\ -1,\ 2)$ και $t=(2,\ 1,\ 0)$;

5. Να γραφούν τα παρακάτω διανύσματα ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων: $u=(2,\ -1,\ 1)$ και $v=(1,\ -3,\ 2)$.

α) $(1,\ 7,\ -4)$, β) $(1,\ 7,\ -4)$.

6. Για ποιες τιμές του $k$, το διάνυσμα $(1,\ k,\ 5)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u=(2,\ -1,\ 1)$ και $v=(1,\ -3,\ 2)$;

7. Να γραφούν οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ ως γραμμικοί συνδυασμοί των πινάκων:

$$E_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\ \text{και}\ E_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

8. Πως μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $u=(1,\ -2,\ 5)$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$, ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $v_1=(1,\ 2,\ 3),\ v_2=(2,\ -1,\ 1)$ και $v_3=(1,\ 1,\ 1)$;

9. Έστω ότι $V$ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων επί του $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι ο χώρος $W$ είναι ένας υποχώρος του $V$, όταν:

α) $W = \{f : f(3) = 0\}$,

β) $W = \{f : f(7) = f(1)\}$,

γ) Ο χώρος $W$ αποτελείται από περιττές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις τέτοιες ώστε: $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

# <u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>


1. **ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ., ΚΟΥΓΙΑΣ Ι., ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ Α.,** *Γραμμική Άλγεβρα,* (αυτοέκδοση), Πάτρα, 2012.

2. **ΓΕΩΡΓΙΑΚΟΔΗΣ Μ., ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ Π.,** *Γραμμική Άλγεβρα,* Εκδόσεις Αθαν. Σταμούλης, Πειραιάς, 1986.

3. **ΓΕΩΡΓΙΑΚΟΔΗΣ Μ., ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ Π.,** *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας* (Τόμοι Ι & ΙΙ), Εκδόσεις Αθαν. Σταμούλης, Αθήνα-Πειραιάς, 1985.

4. **ΛΑΚΚΗ Κ.,** *Μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας,* Θεσσαλονίκη, 1976.

5. **ΛΕΓΑΤΟΣ ΓΕΡ.,** *Άλγεβρα (Μαθηματικά Ι - τόμος 1),* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1990.

6. **ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ ΔΗΜ.,** *Γενικά Μαθηματικά. Αλγεβρικαί Δομαί. Γραμμική Άλγεβρα,* Εκδόσεις Παπαζήση.

7. **ΣΤΡΑΤΗΓΟΠΟΥΛΟΥ Δ.,** *Γραμμική Άλγεβρα,* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1994.

8. **HANDLEY G.,** *Linear Algebra,* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1973.

9. **LANG S.,** *Linear Algebra,* Addison-Wesley, 1971.

10. **LUENBERGER D.C.,** *Introduction to Linear and Nonlinear Programming,* Addison-Wesley, Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1973.

11. **STROLL R.,** *Linear Algebra and Matrix Theory,* London, New York, Toronto, Mc Graw-Hill Book Publ. Corp. Inc., 1952.