ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πέμπτη, 09/06/2016

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

Α2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1,5)\cup(5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών Α είναι $A = f\left(D_f\right) = (-2,5]$

Β2. Έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$)

γ) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4 \neq \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = 3$

B3.

α) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$,διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

β) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(5,7)$

γ) θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=u_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=5=u_0$.

Επομένως έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=\lim\limits_{u\to 5} f(u)=3$

B4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1=3$ και $x_2=7$ αφού:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$) και

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4\neq\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$ (Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$)

B5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x)=0$ είναι $\begin{matrix} x_3=4 \\ x_4=6 \\ x_5=8 \end{matrix}$, αφού από την παρατήρηση του δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα x΄x οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη .

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=x^3\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{y},\ αν\ y\geq 0 \\ x=-\sqrt[3]{-y},\ αν\ y<0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x},\ αν\ x\geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x},\ αν\ x<0 \end{cases}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3,\ x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). ¨Αρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$. Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M(x(t_0), y(t_0))$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = \left[x^3(t)\right]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημε'ιο της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για το ολοκήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)dx$ (αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$) θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$
$$dx = -du$$
$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$
$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:

$I=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)g(-x)dx=\int_{-1}^{1}x^3g(-x)dx=-\int_{1}^{-1}(-u)^3g(u)du=\int_{-1}^{1}(-u)^3g(u)du=-\int_{-1}^{1}u^3g(u)du=-I$

Επομένως $I=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1.

- Για κάθε $x\in(0,1)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).
- Για κάθε $x>1$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0=1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x}+1=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=(D'L)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$

$$f(1)=1$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=1$,επομένως είναι συνεχής και στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$και άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x_0>0$. Θα εξετάσουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωστη στο $x_0=0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}+1=-\infty$$

Επομένως η ευθεία $x=0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2.

- Για $x\in(0,1)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$)με :

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,1)$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e\notin(0,1)$$

Άρα $f'(x) \neq 0, x \in (0,1)$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$

Για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1,+\infty)$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x-1-x\ln x, x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$((ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$) με :

$$h'(x) = 1-(\ln x+1) = -\ln x, x > 0$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Έχουμε:

- $x > 1 \Rightarrow h'(x) < 0$, άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού είναι και συνεχής στο $[1,+\infty)$) και άρα:

  $x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$ για κάθε $x > 1$

  Επομένως $h(x) < 0, x \in (0,+\infty)$ άρα $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x(x-1)^2} < 0,\ x > 1$.

  Το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο ειναι το $x_0 = 1$. Έχουμε:

  $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x(2x-1)} = 1$$

  $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

  Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $x_0 = 1$.

  Δ3. i) Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$(αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left((0,1]\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty,1]$ επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $f(1) = 1$.

  Αφού $0 \in (-\infty,1]$ η f θα έχει μία ρίζα η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι»1-1» ως γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

  Αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ $(0,1]$(αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

- $f\left([1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$ επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Όμως $0 \notin (0,1]$ και άρα η f δεν έχει ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1]$

ii) Το Εμβαδόν του χωρίου είναι $E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} |f(x)|dx, x_0 \in (0,1]$.

Επειδή η είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ έχουμε:

$x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq 0$

Άρα :

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} f(x)dx = \int_{x_0}^{1} \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) dx = \int_{x_0}^{1} \frac{\ln x}{x} dx + \int_{x_0}^{1} 1 dx = \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_{x_0}^{1} = I + 1 - x_0$$

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left[\ln^2 x\right]_{x_0}^{1} - \int_{x_0}^{1} \ln x \cdot (\ln x)' dx = -\ln x_0 - I$$

$$2I = -\ln x_0 \Rightarrow I = \frac{-\ln x_0}{2}$$

$$E(\Omega) = \frac{-\ln x_0}{2} + 1 - x_0 \quad (1)$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της f έχουμε:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0 + x_0}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 .$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E(\Omega) = -\frac{{x_0}^2}{2} + 1 - x_0 = \frac{-{x_0}^2 - 2x_0 + 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. Για κάθε $x > 1$ έχουμε $f'(x) < 0 \Rightarrow F''(x) < 0$. Η F' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $x = 1$ λόγω της αντίστοιχης συνέχειας της f. Άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Ισχύει: $1 < x < x^2$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στα διαδοχικά διαστήματα $[1, x], [x, x^2]$ στα οποία ικανοποιούνται οι προυποθέσεις (Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, οπότε και στα $[1, x], [x, x^2]$).

Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x^2)$ με:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x} \Rightarrow xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \Rightarrow xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$$

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών