Πριν ξεκινήσουμε ας θέσουμε ένα σημαντικό ερώτημα: τι είναι η θεωρία κόμβων; Η θεωρία κόμβων είναι κλάδος της τοπολογίας χαμηλών διαστάσεων που μελετά την ταξινόμηση των κόμβων και των κρίκων. Η βασική έμπνευση της θεωρίας κόμβων δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο κόμπος που συναντάμε στην καθημερινότητά μας από τους κόμπους που κάνουμε για να δέσουμε τα παπούτσια μας με τα κορδόνια μέχρι τους κόμπους στους κάδους που βλέπουμε στα καράβια όταν πάμε διακοπές στα νησιά του Αιγαίου το καλοκαίρι. Βέβαια τους κόμβους μπορούμε να τους συναντήσουμε πέρα από την καθημερινότητα και τα μαθηματικά και σε άλλες επιστήμες όπως στη βιολογία ιδιαίτερα στην αναδιάταξη του DNA, στην στατιστική μηχανική που μελετά μεγάλα συστήματα μορίων, στη χημεία και στη θεωρία γράφων. Η μοναδική ανεπιτυχής εφαρμογή της θεωρίας ήταν στην κοσμολογία.

Ορισμός. Ένας κόμβος είναι μια εμφύτευση ενός κύκλου S^1στον τρισδιάστατο χώρο δηλαδή είναι μια απεικόνιση που μεταφράζεται ως f:$S^1 \to R^3$ χωρίς αυτοτομές.

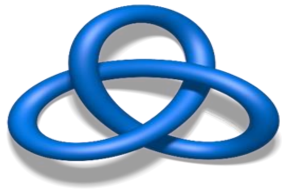
Γενικά μια εμφύτευση του $S^1 στον$ R^3είναι μια απεικόνιση f: $S^1 \to R^{\,3}$ όπου ισχύει:

f είναι $1 - 1$

$D_{f(t)}$ να είναι $1 - 1$ για όλα τα tϵS^1

η αντίστροφη απεικόνιση της f είναι η απεικόνιση $f^{-1}: f(S^1) \to S^1$.

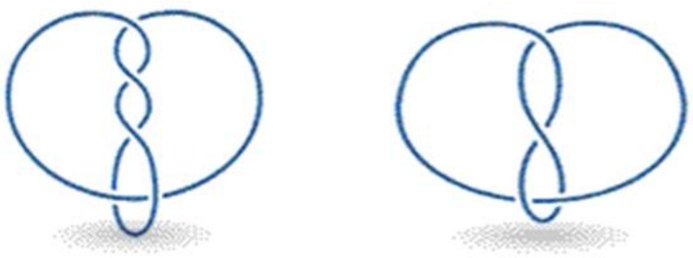
Ο πιο απλός κόμβος όλων είναι ο κύκλος, ο οποίος καλείται trivial κόμβος ή μη κόμβος (Εικόνα 1.(a)) δηλαδή είναι ένας κόμβος ο οποίος δεν τέμνει τον ευατό του πουθενά. Ένας άλλος θεμελιώδης κόμβος στην θεωρία μας είναι ο τριφύλλι (trefoil) κόμβος (Εικόνα 1.(b)).



Εικόνα 1.(b)

Εικόνα 1.(a)

Πάντως υπάρχουν πολλές διαφορετικές εικόνες του ίδιου κόμβου π.χ ο σχήμα-οκτώ κόμβος (figure-eight knot) έχει δύο διαφορετικές εικόνες (Εικόνα 2.).



Εικόνα 2. Τα δύο ισοδύναμα διαγράμματα του σχήματος- οκτώ κόμβου

Τα σημεία στα οποία τέμνει ο κόμβος τον ευατό του καλούνται διασταυρώσεις ενός διαγράμματος. Ο σχήμα-οκτώ κόμβος είναι ένας 4-διασταρούμενος κόμβος διότι ένα διάγραμμα αυτού έχει 4-διασταυρώσεις και δεν έχουμε διαγράμματα αυτού με λιγότερα από τέσσερις διασταυρώσεις.

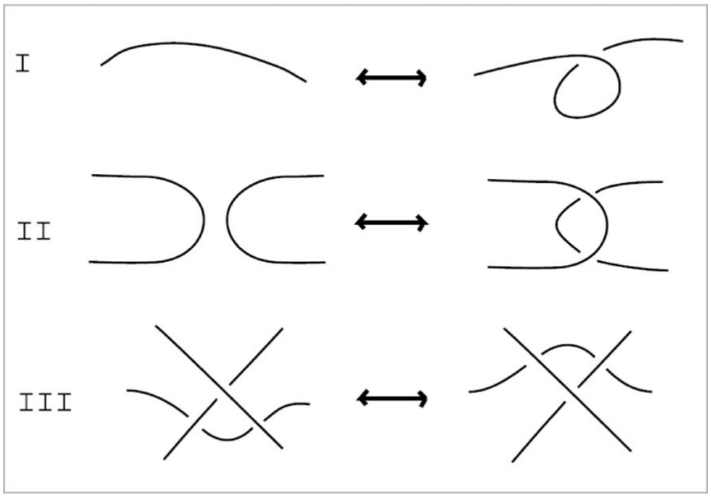
Κινήσεις του Reidemeister

Το 1926 ο Γερμανός μαθηματικός Kurt Reidemeister (1893-1971) απέδειξε ότι εάν έχουμε δύο διακριτά διαγράμματα του ίδιου κόμβου, μπορούμε να πάμε από το ένα διάγραμμα στο άλλο μέσω μίας σειράς τριών κινήσεων που λέγονται κινήσεις του Reidemeister και μιας ισοτοπικής κίνησης στο επίπεδο. Αυτό που αλλάζει στα διαγράμματα είναι η σχέση μεταξύ των διασταυρώσεων.
Όπως είπαμε και παραπάνω οι κινήσεις είναι 3 στο πλήθος:

1. πρώτη κίνηση του Reidemeister ή R_{I}ή I
2. δεύτερη κίνηση του Reidemeister ή R_{II} ή II
3. Τρίτη κίνηση του Reidemeister ή R_{III} ή III

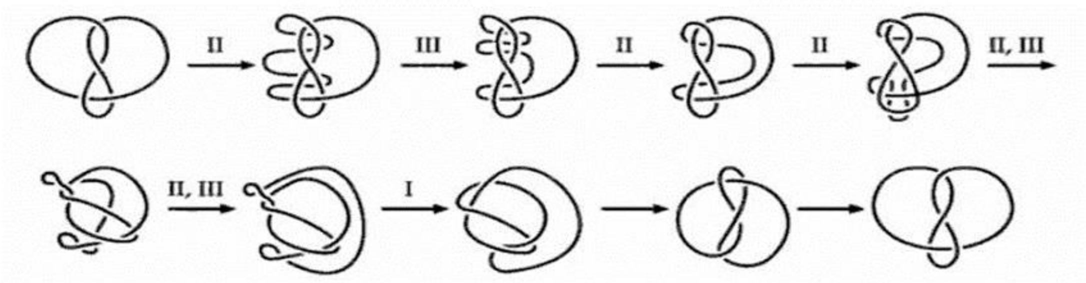
εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τα I, II και III για να περιγράψουμε τις κινήσεις μας.

Σημαντικό είναι να περιγράψουμε το τι κάνουν οι κινήσεις. Αρχικά η I μας επιτρέπει να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μια αναδίπλωση σε έναν κόμβο. Η II μας επιτρέπει να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο διασταυρώσεις ταυτόχρονα. Ενώ η III μας επιτρέπει να μετακινήσουμε ένα τμήμα του κόμβου από τη μία πλευρά μίας διασταύρωσης στην άλλη.



Εικόνα 3. Οι τρείς κινήσεις του Reidemeister.

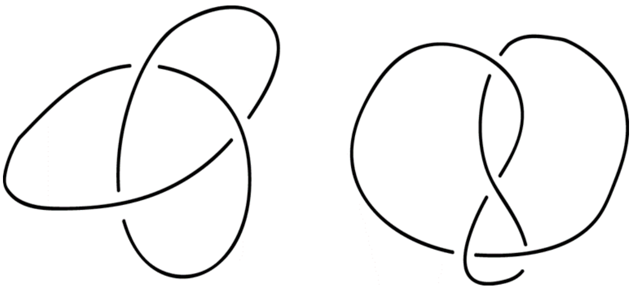
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στο οποίο βλέπουμε στην πράξη τις κινήσεις αυτές, είναι στο σχήμα-οκτώ κόμβου (Εικόνα 4.(a)).



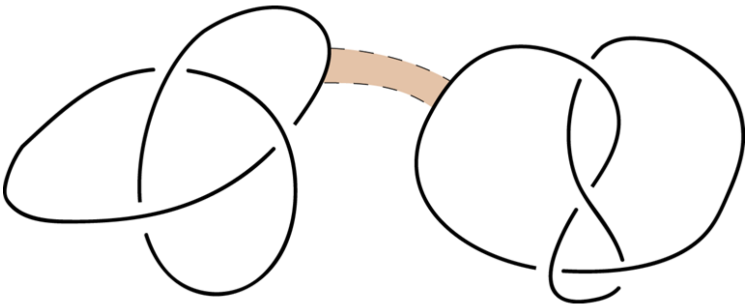
Εικόνα 4.(a)

Σύνθεση κόμβων

Όπως ακριβώς έχουμε σύνθεση δύο συναρτήσεων έχουμε και σύνθεση δύο κόμβων καθώς και ο κόμβος είναι μία απεικόνιση έτσι όπως ορίστηκε. Εάν έχουμε δύο διαφορετικά διαγράμματα κόμβων K και L τότε η σύνθεση τους που συμβολίζεται με K#L προκύπτει με την μετακίνηση ενός μικρού τόξου από κάθε διάγραμμα με την ένωση των δύο σημείων του άκρου κάθε τόξου. Όπως και στην Εικόνα 5. Θεωρώ τον τριφύλλι κόμβο ως K και το σχήμα-οκτώ κόμβο ως L. Τότε τη σύνθεση K#L την βλέπουμε στην Εικόνα 6.(c).

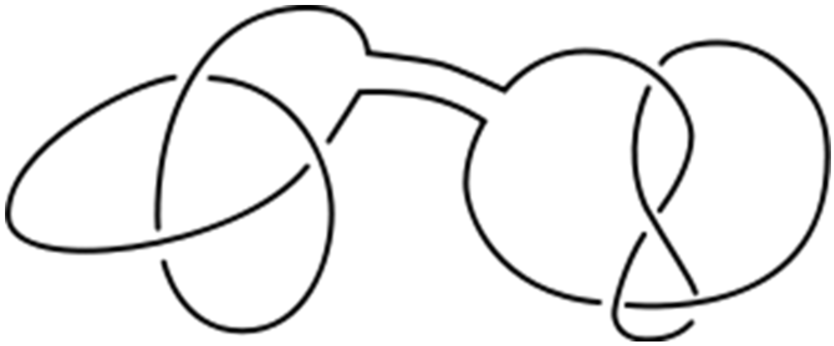


Εικόνα 6.(a) ↓



Εικόνα 6.(b)

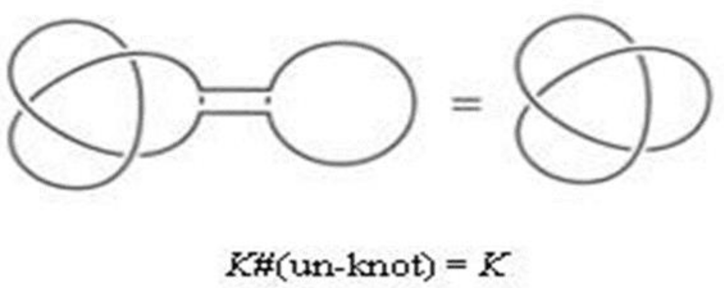
↓



Εικόνα 6.(c)

Οι κόμβοι οι οποίοι παράγουν την σύνθεση ονομάζονται παράγωντες κόμβοι.

Ενώ ένας κόμβος εάν δεν είναι σύνθεση κάθε δύο κόμβων καλείται πρώτος κόμβος (prime knot).



Εικόνα 7. Λειτουργεί το un-knot σαν το ουδέτερο στοιχείο στην σύνθεση των κόμβων

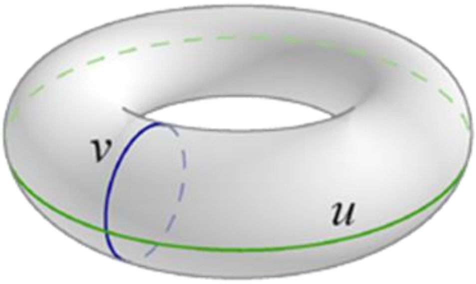
(p,q)−Τόρος κόμβος

Όπως γνωρίζουμε ένας τόρος κόμβος (torus) είναι μια επιφάνεια εκ`περιστροφής. Ο τόρος συμβολίζεται με $T^2 = S^1 \times S^1$.

Ορισμός. Ένας (p,q)−τόρος κόμβος είναι μία απεικόνιση με μορφή $T_{p,q}: S^1 \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$. Αυτή η απεικόνιση είναι μια εμφύτευση ενός κύκλου σε έναν τόρο T^2, η οποία ορίζεται στον Ευκλείδειο σύστημα συντεταγμένων ως εξής:

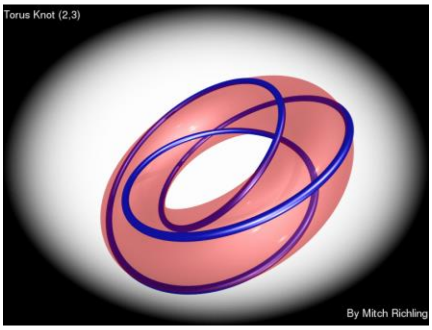
$$\theta \to ((2 + \cos q\theta)\cos p\theta, (2 + \cos q\theta)\sin p\theta, -\sin q\theta)$$

όπου το T^2 είναι ένα σύνολο σημείων απόστασης 1 από τον κύκλο ακτίνας 2 γύρω από την διεύθυνση του xy-επιπέδου.
Με άλλα λόγια είναι ένας κόμβος πάνω στην επιφάνεια ενός τόρου ο οποίος κινείται p-φορές γύρω από την κατεύθυνση του μεσημβρινού και q-φορές γύρω από τον ισημερινό ενός τόρου (Εικόνα 8.).

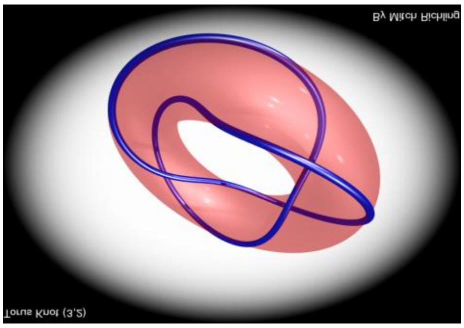


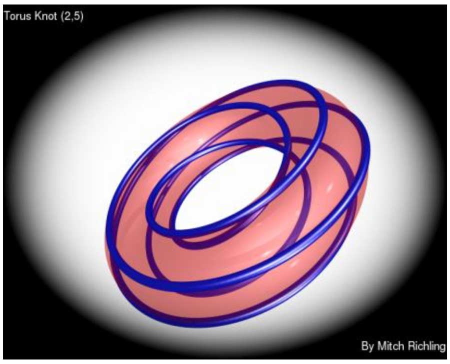
Εικόνα 8. Στον τόρο το v είναι ο μεσημβρινός και το u είναι ο ισημερινός.

Πίνακας 1.

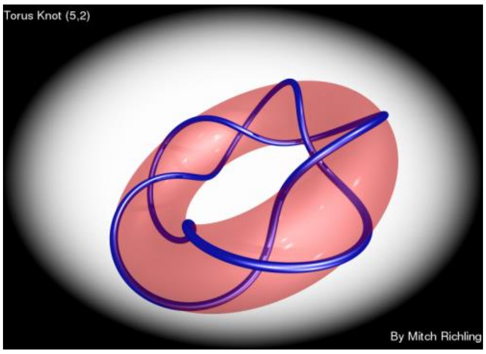


(2,3)-τόρος κόμβος

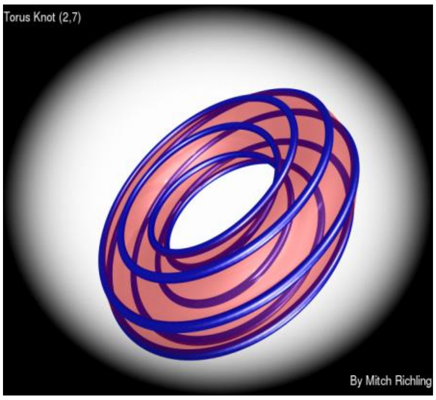

(3,2)-τόρος κόμβος



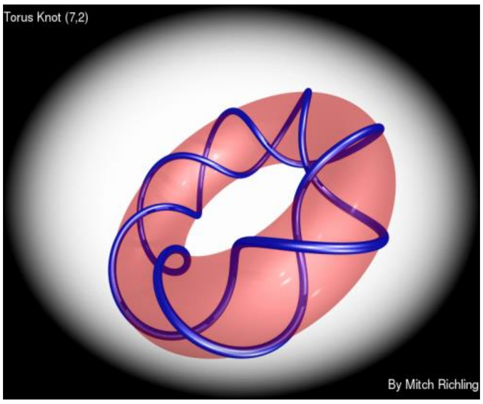
(2,5)-τόρος κόμβος



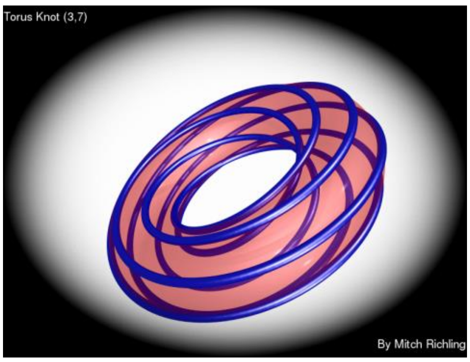
(5,2)-τόρος κόμβος



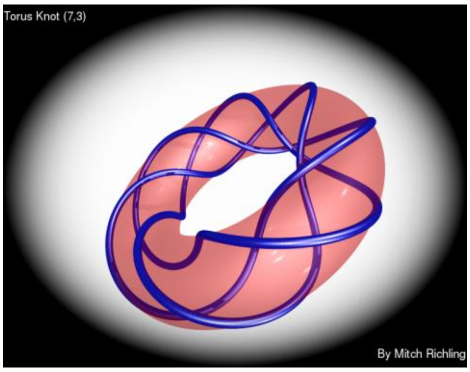
(2,7)-τόρος κόμβος



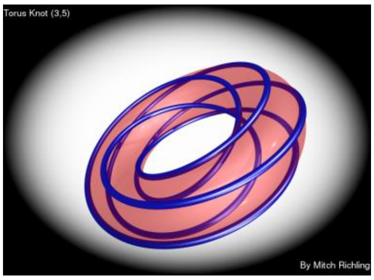
(7,2)-τόρος κόμβος



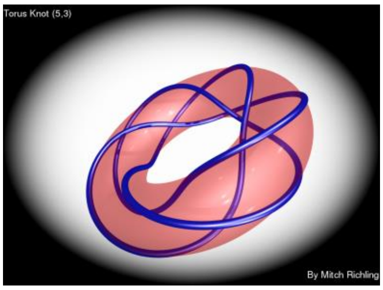
(3,7)-τόρος κόμβος



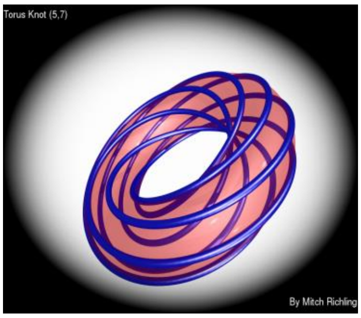
(7,3)-τόρος κόμβος



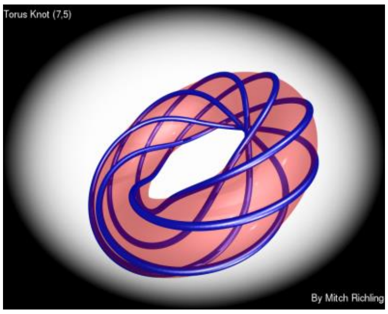
(3,5)-τόρος κόμβος



(5,3)-τόρος κόμβος



(5,7)-τόρος κόμβος



(7,5)-τόρος κόμβος

Όπως βλέπουμε και στον Πίνακα 1. Το ζεύγος (p,q) των ακεραίων είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί.

Παράδειγμα. Ο τριφύλλι κόμβος τέμνει τον ισημερινό τρείς φορές. Επομένως θα πρέπει να πάμε γύρω από την κατεύθυνση του ισημερινού τρείς φορές. Όταν ο τριφύλλι κόμβος τέμνει τον μεσημβρινό δύο φορές, έτσι θα πάμε γύρω από την κατεύθυνση του ισημερινού δύο φορές. Άρα έχουμε την μορφή του (3,2)-τόρος κόμβος.

Θεώρημα. Υπάρχει(p,q)-τόρος κόμβος εάν και μόνον εάν τα p και είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

Σχόλιο. Ο (p,q)-τόρος κόμβος είναι ισοδύναμος με τον (q,p)-τόρο κόμβο

Πολυώνυμα κόμβων

Το πρώτο πολυώνυμο για τους κόμβους προτάθηκε το 1928 από τον J.Alexander. Αυτό το αναλλοίωτο πολυώνυμο ήταν χρήσιμο να διακρίνει κόμβους μεταξύ τους. Το πολυώνυμο του Alexander το χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί για περισσότερο από 50 χρόνια. Το 1969 ο John Convoy βρήκε έναν τρόπο να υπολογίζει τα πολυώνυμα του Alexander μέσω μιας πιο οπτικής αλλά ταυτόχρονα μαθηματικής σχέσης του ονομάζεται skein.

Το 1984 ο μαθηματικός Vaughan Jones από την Νέα Ζηλανδία, ανακάλυψε ένα νέο πολυώνυμο για τους κόμβους. Το πολυώνυμο αυτό προήλθε από μια παρατήρηση που έκανε, όταν διαπίστωσε ότι μια σχέση που μελετούσε στην άλγεβρα τελεστών έμοιαζε πολύ με την σχέση που τον απασχολούσε την θεωρία κόμβων. Αυτό το γεγονός τον ώθησε να βρει το πολυώνυμο.

Τέσσερις μήνες μετά την ανακοίνωση του Jones για το πολυώνυμο του, ανακαλύφθηκε το HOMFLY, το πολυώνυμο αυτό πήρε το όνομά του από τα αρχικά γράμματα των μαθηματικών Hoste, Ocneau, Millett, Freyd, Lickorish και Yetter. Το αξιοσημείωτο στην ανακάλυψη του πολυωνύμου HOMFLY ήταν ότι αυτοί εργάζονταν σε τέσσερις ανεξάρτητες επιστημονικές ομάδες. Αλλά το ίδιο πολυώνυμο αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τους άλλους, από δυο Πολωνούς μαθηματικούς ονόματι Przytycki και Traczyk όπου το αποτέλεσμα για της εργασίας τους έφτασε στα χέρια των 6 μαθηματικών αρκετούς μήνες αργότερα με επιστολή.

Εμείς θα σταθούμε στα πολυώνυμα Alexander και HOMFLY όπου θα δούμε πως ορίζονται και υπολογίζονται στην θεωρία κόμβων.

- <u>Πολυώνυμο Alexander</u>

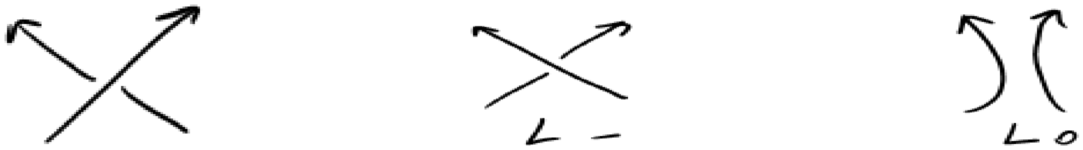
Το 1969 ο Jone Conway απέδειξε ότι το πολυώνυμο Alexander που το συμβολίζουμε με Δ μπορούμε να το υπολογίσουμε με τη χρήση δυο κανόνων. Ο πρώτος κανόνας μας λέει ότι το πολυώνυμο ενός μη κόμβου είναι ίσο με το.

Αυτό ισχύει για όλα τα διαγράμματα μη κόμβων.

Κανόνας 1: $\Delta(\bigcirc) = 1$

Ο δεύτερος κανόνας βασίζεται στη skein σχέση. Παίρνουμε τα τρία διαγράμματα και τα συσχετίζουμε μεταξύ τους.

Κανόνας 2:



L_+

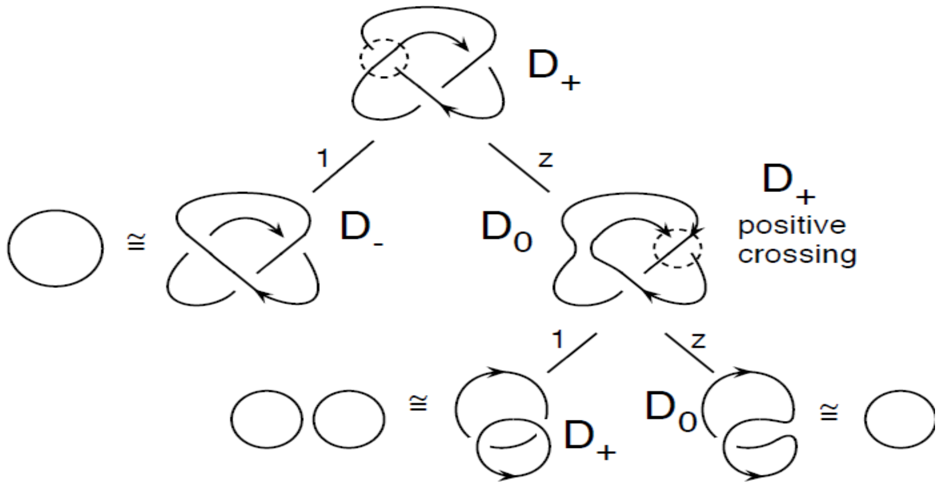
$$\Delta(\mathrm{L}_+) - \Delta(\mathrm{L}_-) + \Delta\left(\mathrm{t}^{1/2} - t^{-1/2}\right)\Delta(\mathrm{L}_0) = 0$$

Με αυτούς τους δυο κανόνες μπορούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο Alexander κάθε κόμβου. Αλλά έχουμε και έναν εναλλακτικό τρόπο να τα υπολογίσουμε τα πολυώνυμα των κόμβων με τη βοήθεια των πινάκων του Seifert που θα αναφέρουμε παρακάτω.

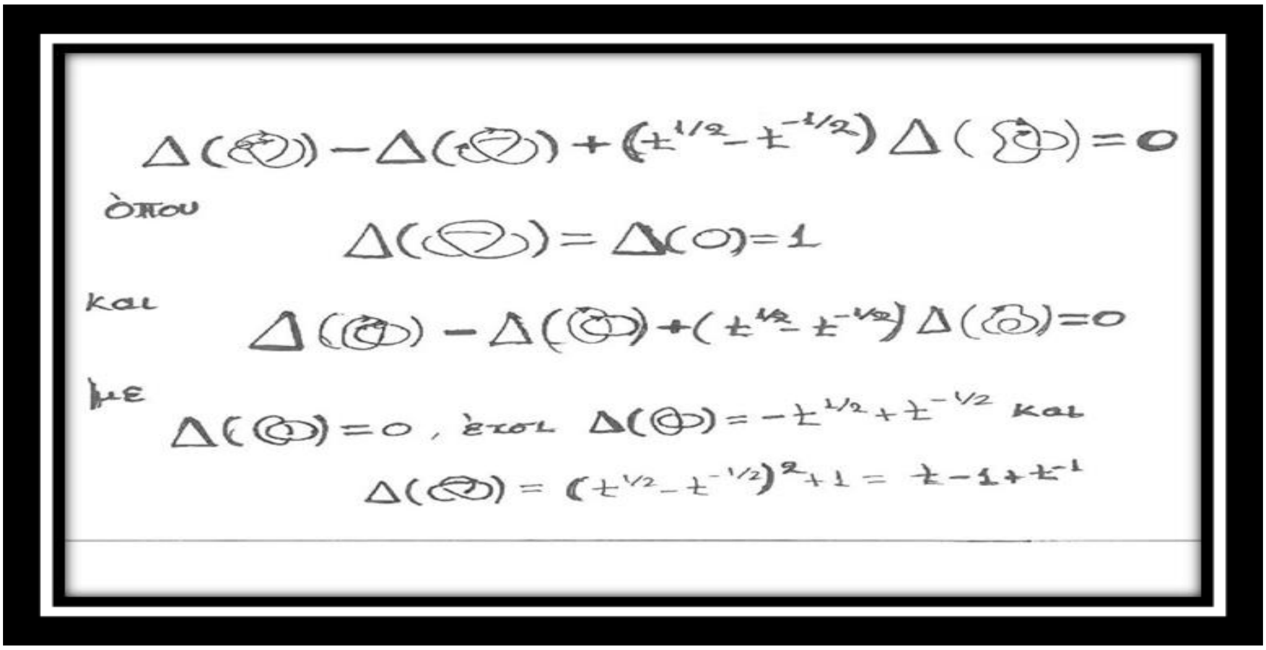
Αλλά ας μην χρονοτριβούμε και πάμε να δούμε ορισμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Alexander του δεξί-τριφύλλι κόμβου με δύο τρόπους.

1 τρόπος .



Εικόνα 11.



2 τρόπος. Μέσω των πινάκων του Seifert δηλαδή:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\Delta(t) = t^{-k/2} det(M - tM^T) = t^{-1} det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = t + t^{-1} - 1$ όπου το k είναι η τάξη του πίνακα το M.

Συνεπώς και με τους δυο τρόπους το πολυώνυμο Alexander για το δεξί-τριφύλλι κόμβο είναι το.

- <u>Πολυώνυμο HOMFLY</u>

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το πολυώνυμο Alexander ήταν το μοναδικό πολυώνυμο για 50 χρόνια, μέχρι που ο Νεοζηλανδός μαθηματικός Vaughan Jones βρήκε τα Jones πολυώνυμα. Υπήρχαν μαθηματικοί που ήθελαν να βρουν ένα πολυώνυμο με δύο μεταβλητές που να γενικεύει τα πολυώνυμα Alexander και Jones. Το πρώτο τέτοιο πολυώνυμο ήταν το HOMFLY το οποίο είναι ένα Laurent πολυώνυμο με l και m συντελεστές και συμβολίζεται ως $\mathrm{P}(l,m)$.

Όπως στα Alexander έτσι και στα HOMFLY ισχύουν 2 κανόνες

Κανόνας 1: **P(μη κόμβου)=1**

Το P του μη κόμβου είναι 1 για όλα τα διαγράμματα ενός μη κόμβου.

Κανόνας 2:

Εάν L_+, L_-, L_0 είναι τρείς προσανατολισμένες συνελίξεις τότε αυτές οι συνελίξεις σχετίζονται μεταξύ τους με τη σχέση:

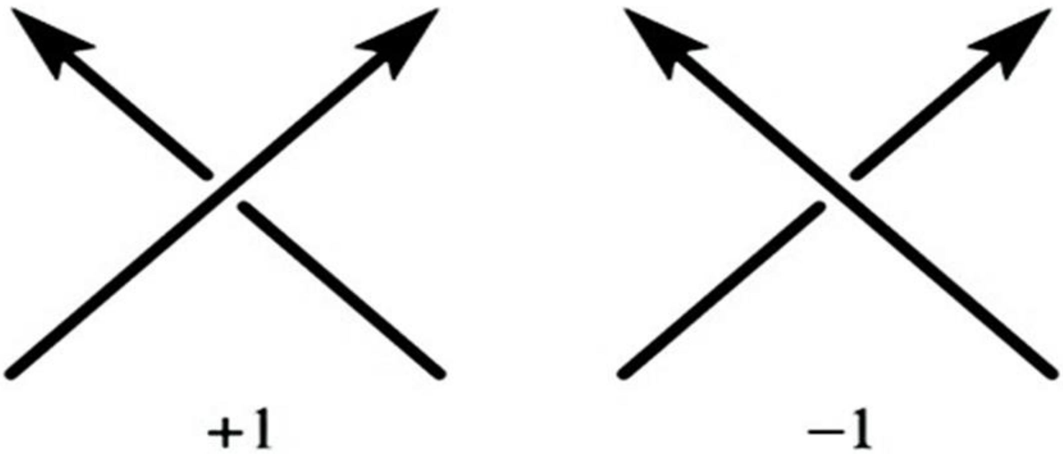
$$\mathbf{lP}(\boldsymbol{L_+}) + \boldsymbol{l^{-1}P}(\boldsymbol{L_-}) + \boldsymbol{mP}(\boldsymbol{L_0}) = \mathbf{0}.$$

Ένα χαρακτηριστικό **παράδειγμα** HOMFLY πολυωνύμου είναι το HOMFLY του τριφύλλι κόμβου που είναι $-\mathrm{l}^4 + m^2 l^2 - 2l^2$

Πίνακας του Seifert

Πριν ξεκινήσουμε να μιλάμε για τους πίνακες Seifert ένα σημαντικό στοιχείο τους που πρέπει να αναφέρουμε είναι ο αριθμός συνέλιξης (linking number) ενός προσανατολισμένου το οποίο το συμβολίζουμε με lk.

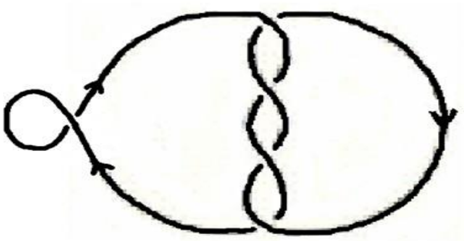
Ορισμός. Ο αριθμός συνέλιξης ενός προσανατολισμένου κόμβου που συμβολίζουμε ως όπου το lk(K)=$\frac{1}{2}\sum_c sign(c)$ είναι το πρόσημο της διασταύρωσης σε έναν κόμβο αρκεί μόνο να γίνεται η διασταύρωση μεταξύ ξένων κύκλων.



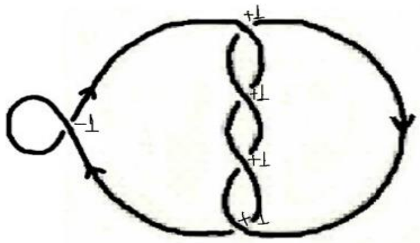
Εικόνα 11. Βλέπουμε τα πρόσημα των διασταυρώσεων σε δύο προσανατολισμένες συνέλιξεις.

Παραδείγματα. Να βρούμε το lk(K) των παρακάτω προσανατολισμένων κόμβων.

(a)



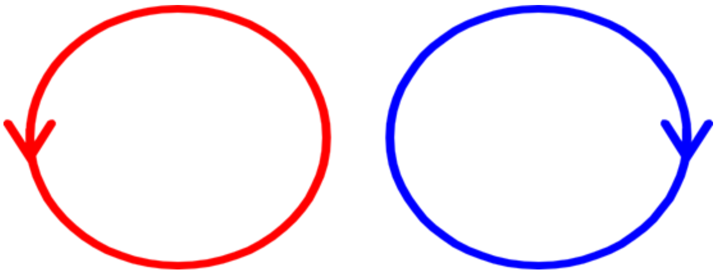
Εικόνα 12.(a)



Εικόνα 12(.b)

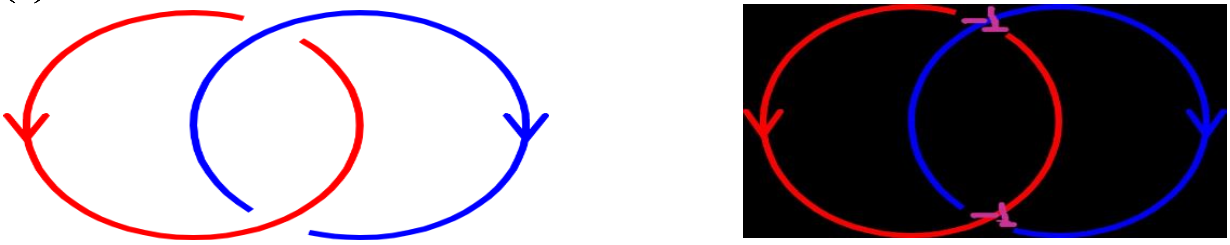
Όπως βλέπουμε και στις εικόνες και ιδιαίτερα στην 12.(b) έχουμε τα πρόσημα των διασταυρώσεων επομένως το lk(K) = 1/2(+1+1+1+1) = 2. Το -1 δεν το συμπεριλαμβάνουμε στον υπολογισμό διότι η διασταύρωση δεν γίνεται σε ξένο κύκλο αλλά σε στον ίδιο τον κύκλο και από τον ορισμό απορρίπτεται το -1.

(b)



Εικόνα 13. lk(K)=0

(c)



Εικόνα 14. Το lk(K) = -1

Ορισμός. Έστω μία επιφάνεια του Seifert για έναν κόμβο K με n κλειστές καμπύλες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (κλειστοί κύκλοι). Τότε ο πίνακας του Seifert είναι ένας πίνακας n × n,

$$M=[lk(\alpha_i, \alpha_j^*)] \text{ με } i, j=1, 2, 3, \ldots, n.$$

Γενικά, ο πίνακας του Seifert δεν είναι ένας συμμετρικός πίνακας αφού το $lk(\alpha_i, \alpha_j^*) \neq lk(\alpha_j, \alpha_i^*)$. Στην περίπτωση που το γένος της επιφάνειας Seifert είναι μηδέν (g=0) τότε ο Seifert πίνακας είναι ο μηδενικός.

Βιβλιογραφία

[1] Allison K. Henrich and Inga Johnson: An interactive introduction to knot theory, Dover publications 2017.
[2] Bruno Martelli: An introduction to geometric topology, Dipartimento di Matematica Italy 2016.
[3] Colin C.Adams: The Knot Book: An Elementary Introduction to the mathematical theory of knots, AMS ,USA 2004.
[4] Edward Long, Topological invariants of knots: three routes to the Alexander polynomial, Manchester University, United Kingdom 2005.
[5] Kauffman K. Louis: Formal Knot Theory, Dover publications , United States 2006.
[6] Kunio Murasugi translated by Bohdam Kurpita: Knot theory and it's applycations, Birkhäuser 1996.
[7] Larsen Linov: An introduction to the knot theory and the knot groups, Chicago 2014.
[8] Lickorich, W. B. Raymond, An introduction to knot theory, Springer 1997.

Εικόνες από το διαδίκτυο