

35 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Του προπτυχιακού φοιτητή Ευάγγελου Γκούμα

Ασκήσεις στους τοπολογικούς χώρους

1. Δίνεται το σύνολο $X = \{a, b, c, d, e\}$. Να εξετάσετε αν τα σύνολα

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

και

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

είναι τοπολογίες επί του συνόλου X .

Λύση

Για το πρώτο σύνολο ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκουν στο τ_1
- 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ_1 ανήκει στο τ_1
- 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ_1 ανήκει στο τ_1

Επομένως, το τ_1 είναι τοπολογία επί του X .

Για το δεύτερο σύνολο δεν ισχύουν όλα τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκουν στο τ_2
- 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ_2 ανήκει στο τ_2
- 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ_2 δεν ανήκει στο τ_2 ($\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$ δεν ανήκει στο τ_2)

Επομένως, το τ_2 είναι τοπολογία επί του X .

2. Έστω $X = \{a, b, c, d\}$ και $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθούν τα σύνολα $Cl(\{b, d\})$, $Cl(\{a, c\})$ και $Int(\{b, c, d\})$.

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκουν στο τ
- 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
- 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ

Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X .

Θα βρούμε το συμπλήρωμα του συνόλου που είναι το $\tau' = \{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{a, d\}, \{d\}\}$.

Άρα το:

- $Cl(\{b, d\})=X$
- $Cl(\{a, c\})=\{a, c, d\}$
- $Int(\{b, c, d\})=\{b, c\}$

3. Έστω $X=\{1, 2, 3, 4\}$ και $\tau=\{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}\}$. Να αποδειχθεί ότι η τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθεί η σχετική τοπολογία τ_A επί του συνόλου $A=\{2, 3\}$.

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκει στο τ
 - 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
 - 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
- Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X .

Η σχετική τοπολογία δίνεται από αυτή τη σχέση $\tau_A = \{U \cap A : \tau \in U\}$, δηλαδή η τοπολογία έχει τη μορφή $\tau_A = \{\emptyset, A, \{2, 3\}, \{3\}\}$.

4. Έστω $X=\{1, 2, 3\}$ και $\tau=\{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και βρεθούν τα σύνολα $Cl(\{1, 3\})$, $Int(\{3\})$ και $Cl(\{1, 2\})$.

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκει στο τ
 - 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
 - 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
- Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X .

Το συμπληρωματικό σύνολο του τ είναι το $\tau'=\{\emptyset, X, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3\}\}$. Άρα το:

- $Cl(\{1, 3\})=\{1, 3\}$
- $Cl(\{1, 2\})=X$
- $Int(\{3\})=\emptyset$.

5. Έστω $X=\{1,2,3,4,5\}$ και $\tau=\{\emptyset, X, \{1,3,4\}, \{4\}, \{1,3\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθούν τα σύνολα $Cl(\{2,3\})$, $Int(\{1,2,4\})$ και $Bd(\{3,4,5\})$.

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

- 1) Το \emptyset και το X ανήκει στο τ
 - 2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
 - 3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
- Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X .

Το συμπληρωματικό σύνολο του τ είναι το $\tau'=\{\emptyset, X, \{2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$

Άρα το:

- $Cl(\{2,3\})=\{1, 2, 3, 5\}$
- $Int(\{1, 2, 4\})=\{4\}$
- $Bd(\{3, 4, 5\})= Cl(\{3, 4, 5\}) \setminus Int(\{3, 4, 5\})=X \setminus \{4\}=\{1, 2, 3, 5\}$.

Ασκήσεις στις απεικονίσεις

6. Δίνονται οι τοπολογικοί χώροι (X, τ) και (Y, σ) , όπου $Y=X=\{a, b, c\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ και $\sigma=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ με $f(b)=a$, $f(a)=b$ και $f(c)=c$ είναι συνεχής.

Λύση

α' τρόπος

Έστω μία ανοικτή περιοχή U , εάν $U \in \sigma$ τότε $f^{-1}(U) \in \tau$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

- ✚ Αν $U=\emptyset$ εσ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
- ✚ Αν $U=X$ εσ τότε $f^{-1}(X) = X \in \tau$
- ✚ Αν $U=\{a\}$ εσ τότε $f^{-1}(\{a\}) = \{b\} \in \tau$
- ✚ Αν $U=\{b\}$ εσ τότε $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \in \tau$
- ✚ Αν $U=\{a, b\}$ εσ τότε $f^{-1}(\{a, c\}) = \{b, c\} \notin \tau$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο X .

β' τρόπος

Έστω F ένα κλειστό σύνολο του Y , εάν $F \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(F) \in \tau'$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

Αρχικά θα βρούμε τα συμπληρωματικά σύνολα των τ και σ . Τα οποία είναι:

$$\sigma' = \{\{b, c\}, \{c\}, \{b\}, X, \emptyset\} \quad \text{και} \quad \tau' = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$$

Άρα:

- ✚ Αν $F=\emptyset \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau'$
- ✚ Αν $F=X \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(X)=X \in \tau'$
- ✚ Αν $F=\{b, c\} \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(\{b, c\}) = \{a, c\} \in \tau'$
- ✚ Αν $F=\{c\} \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \in \tau'$
- ✚ Αν $F=\{b\} \in \sigma'$ τότε $f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \notin \tau'$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο X .

7. Έστω $X=\{0,1\}$ και $\tau=\{X, \{0\}, \emptyset\}$. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ με $f(0)=1$ και $f(1)=0$ είναι συνεχής.

Λύση

α' τρόπος

Θα το αποδείξουμε με τη βοήθεια του ορισμού, άρα:

- Για το $x_0 = 0$ το $f(x_0) = f(0) = 1$. Τότε για κάθε ανοικτή $U_{f(0)} = U_1$ του $f(0)$ στο χώρο X δηλαδή $U_1 = X$. Υπάρχει μία ανοικτή περιοχή V_0 δηλαδή το $\{0\}$ ή X στο χώρο X τ.ω. $f(V_0) \subseteq U_1$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 .

- Για το $x_0 = 1$ το $f(x_0) = f(1) = 0$. Τότε για κάθε ανοικτή περιοχή U_0 του $f(1)$ στο χώρο X δηλαδή $U_0 = \{0\}$ ή X . Το $V_1 = X$. Επομένως το $f(V_1) \not\subseteq U_0$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο X .

β' τρόπος

Έστω μία ανοικτή περιοχή U , εάν $U \in \tau$ τότε το $f^{-1}(U) \in \tau$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

- ✚ Αν $U = \emptyset \in \tau$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
- ✚ Αν $U = X \in \tau$ τότε $f^{-1}(X) = X \in \tau$
- ✚ Αν $U = \{0\} \in \tau$ τότε $f^{-1}(\{0\}) = \{1\} \notin \tau$.

Επομένως, η f δεν είναι συνεχής στο X .

8. Έστω $(X = \{a, b, c\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{a, b\}\})$ και $(Y = \{a, b, c\}, \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\})$ τοπολογίες επί του X . Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ με $f(a) = a, f(b) = a$ και $f(c) = c$ είναι συνεχής.

Λύση

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα θεωρώ μία ανοικτή περιοχή U που να ανήκει στην τοπολογία του Y . Για το παράδειγμα μας ισχύουν τα εξής:

- ✚ Αν $U = \emptyset \in \tau_2$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$
- ✚ Αν $U = X \in \tau_2$ τότε $f^{-1}(X) = X \in \tau_1$
- ✚ Αν $U = \{a\} \in \tau_2$ τότε $f^{-1}(\{a\}) = \{a, b\} \in \tau_1$
- ✚ Αν $U = \{b\} \in \tau_2$ τότε $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \in \tau_1$
- ✚ Αν $U = \{a, b\} \in \tau_2$ τότε $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \in \tau_1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο X .

9. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά δεν είναι ανοικτή.

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = 1 \forall x \in \mathbf{R}$. Τότε $f[A] = \{1\}$ για όλα τα $A \subset \mathbf{R}$. Επομένως η f μία συνεχής απεικόνιση, κλειστή αλλά όχι ανοικτή.

10. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης που είναι κλειστή αλλά δε είναι ανοικτή.

Λύση

Θεωρώ την απεικόνιση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) = x^2$, έστω $A = (-1, 1)$ ανοικτό σύνολο. Το $f[A] = [0, 1)$ δεν είναι ανοικτή. Άρα η συνάρτηση μας δεν ανοικτή.

Ασκήσεις στις βασικές ιδιότητες των τοπολογικών χώρων

11. Δίνεται ο τοπολογικός χώρος (X, τ) , όπου και $X = \{a, b, c, d\}$ και $\tau = \{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$. Να εξεταστεί αν ο (X, τ) είναι T_1 - χώρος.

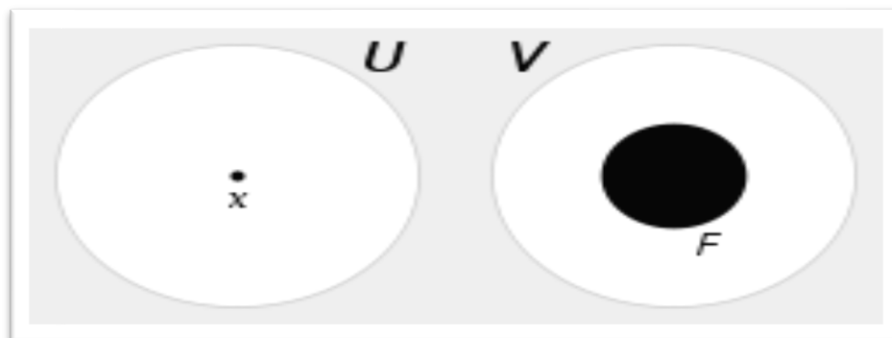
Λύση

Ένας τοπολογικός χώρος είναι T_1 - χώρος εάν και μόνο εάν $\forall x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό. Σε εμάς υπάρχουν μονοσύνολα που δεν είναι κλειστά. Π. χ το $\{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \tau$ άρα ο τοπολογικός μας χώρος δεν είναι T_1 - χώρος.

12. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $\tau = \{\{a\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$ τοπολογία επί του X . Να εξετασθεί αν ο χώρος (X, τ) είναι κανονικός χώρος.

Λύση

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος κανονικός θα πρέπει να είναι T_1 και T_3 χώρος. Ο χώρος μας δεν είναι Fréchet διότι υπάρχουν μονοσύνολα που δεν είναι κλειστά. Άρα ο χώρος μας δεν είναι κανονικός (regular space) διότι δεν είναι Fréchet. Αλλά είναι T_3 – χώρος, Όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα:



- ✓ Για το $x=a \in X$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U=\{a\}$ τέτοιο ώστε το $a \in U = \{a\}$ και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το $\{b, c\} \in \tau$ όπου το $a \notin \{b, c\}$ και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $V=\{b, c\}$ όπου $F \subseteq V$ και ισχύει ότι $U \cap V = \emptyset$.
- ✓ Για το $x=b \in X$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U=\{b, c\}$ τέτοιο ώστε το $b \in U=\{b, c\}$ και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το $\{a\} \in \tau$ όπου το $b \notin \{a\}$ και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $V=\{a\}$ όπου $F \subseteq V$ και ισχύει ότι $U \cap V = \emptyset$.
- ✓ Για το $x=c \in X$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $U=\{b, c\}$ τέτοιο ώστε $c \in U = \{b, c\}$ το και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το $\{a\} \in \tau$ όπου το $c \notin \{a\}$ και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $V=\{a\}$ όπου $F \subseteq V$ και ισχύει ότι $U \cap V = \emptyset$.

Όπου το $\tau = \{X, \{b, c\}, \{a\}, \emptyset\}$

Επομένως, ο χώρος είναι T_3 – χώρος.

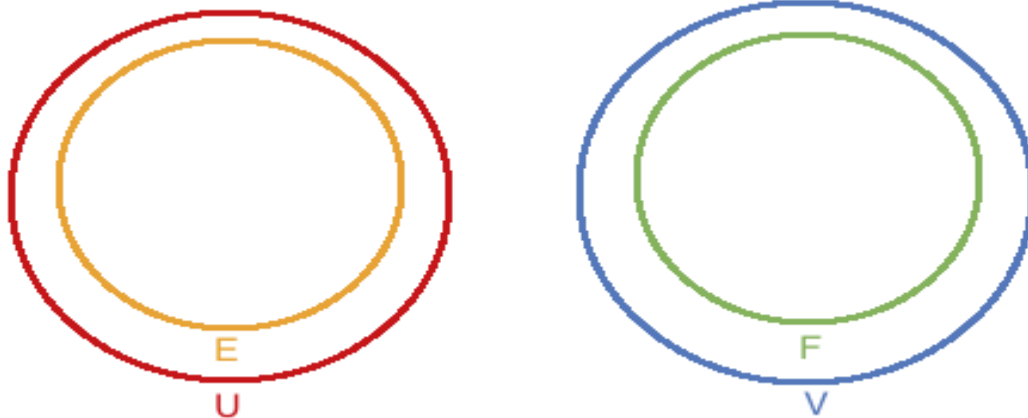
Αλλά όπως είπαμε και παραπάνω ο χώρος με την συγκεκριμένη τοπολογία δεν είναι κανονικός χώρος.

13. Έστω $X=\{a, b, c\}$ και $\tau=\{X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$ τοπολογία επί του X . Να εξεταστεί αν ο (X, τ) είναι φυσικός χώρος.

Λύση

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος φυσικός (normal) θα πρέπει να είναι T_1 και T_4 χώρος ταυτόχρονα. Όπως μπορούμε να δούμε ο χώρος μας με την συγκεκριμένη τοπολογία δεν είναι φυσικός αφού δεν είναι T_1 και με βάση την άσκηση 2 που λύσαμε παραπάνω .

Αλλά ας εξετάσουμε εάν είναι T_4 . Βλέποντας την παρακάτω εικόνα μπορούμε να καταλάβουμε.



Για κάθε E, F είναι κλειστά υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, του X με $E \cap F = \emptyset$. Και υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X με $E \subseteq U$ και $F \subseteq V$ και ισχύει ότι $U \cap V = \emptyset$.

Με $\tau = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$, άρα μπορούμε να βρούμε κλειστά υποσύνολα τα οποία είναι το \emptyset, X και ανοικτά \emptyset, X που να τα περιέχουν και να είναι ξένα μεταξύ τους. Ως εκ τούτου ο χώρος (X, τ) είναι T_4 - χώρος.

14. Έστω $f, g: X \rightarrow Y$ συνεχείς απεικονίσεις από ένα τοπολογικός χώρο X σε ένα Hausdorff χώρο Y . Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A = \{x \in X: f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Λύση

Έστω $A = \{x | f(x) = g(x)\}$. Εάν (x_λ) είναι μία ακολουθία στο A και $x_\lambda \rightarrow x$, τότε μέσω των συνεχών συναρτήσεων έχουμε $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ και $g(x_\lambda) \rightarrow g(x)$ στο Y . Το $f(x_\lambda) = g(x_\lambda)$ για όλα τα λ και το όριο είναι μοναδικό μέσα στο Y , έχουμε $f(x) = g(x)$. Άρα το $x \in A$ και το A είναι κλειστό.

Ασκήσεις στο γινόμενο τοπολογικών χώρων

15. Δίνεται ο τοπολογικός χώρος (X, τ) με $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $\tau = \{X, \{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \emptyset\}$ και τοπολογικό χώρο $Y = \{\kappa, \lambda\}$ με $\tau = \{Y, \{\kappa\}, \emptyset\}$. Να βρεθεί μία βάση της τοπολογίας γινομένου επί του $X \times Y$.

Λύση

Το γινόμενο $X \times Y = \{(\alpha, \kappa), (\alpha, \lambda), (\beta, \kappa), (\beta, \lambda), (\gamma, \kappa), (\gamma, \lambda)\}$

- ✚ $\pi_X^{-1}(\emptyset) = \pi_Y^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- ✚ $\pi_X^{-1}(X) = \pi_Y^{-1}(Y) = X \times Y$
- ✚ $\pi_X^{-1}(\{\alpha\}) = \{(\alpha, \kappa), (\alpha, \lambda)\}$
- ✚ $\pi_X^{-1}(\{\beta, \gamma\}) = \{(\beta, \kappa), (\beta, \lambda), (\gamma, \lambda), (\gamma, \kappa)\}$
- ✚ $\pi_Y^{-1}(\{\kappa\}) = \{(\alpha, \kappa), (\beta, \kappa), (\gamma, \kappa)\}$

Άρα η βάση της τοπολογίας μας είναι $B = \{\emptyset, X \times Y, \{(\alpha, \kappa), (\alpha, \lambda)\}, \{(\beta, \kappa), (\beta, \lambda), (\gamma, \lambda), (\gamma, \kappa)\}, \{(\alpha, \kappa), (\beta, \kappa), (\gamma, \kappa)\}, \{(\alpha, \kappa)\}, \{(\beta, \kappa), (\gamma, \kappa)\}\}$.

16. Έστω (X, τ_1) και (Y, τ_2) τοπολογικοί χώροι, όπου $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ και $\tau_2 = \{\emptyset, Y, \{1\}\}$. Να βρεθεί μία βάση της τοπολογίας γινομένου επί του $X \times Y$.

Λύση

Έχουμε το σύνολο $X \times Y =$

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$\pi_X^{-1}(X) = \pi_Y^{-1}(Y) = X \times Y$$

$$\pi_X^{-1}(\emptyset) = \pi_Y^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\pi_X^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

$$\pi_X^{-1}(\{2, 3\}) = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$\pi_Y^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$$

Η βάση της τοπολογίας γινομένου είναι: $B = \{\emptyset, X \times Y, \{(1, 1), (1, 2)\}, \{(1, 1)\}, \{(2, 1), (3, 1)\}, \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}, \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}\}$. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση.

17. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος $X = \{1, 2\}$ και $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Να βρεθεί βάση της τοπολογίας γινομένου επί του $X \times R$.

Λύση

Θεωρώ μία βάση του R το $\{2\}$ και κάνω ότι ακριβώς έκανα και στην προηγούμενη άσκηση.

18. Να αποδειχθεί ότι η τοπολογία του χώρου γινομένου $R \times \dots \times R$ συμπίπτει με την τοπολογία του Ευκλείδειου χώρου R^n .

Λύση

Έστω R με την Ευκλείδεια τοπολογία που είναι ένα ανοικτό διάστημα. Έστω ένα ανοικτό σύνολο στην τοπολογία γινομένου του R^n είναι ένωση των ανοικτών διαστημάτων. Αφού το γινόμενο είναι ένα ανοικτό σύνολο που είναι ένα ανοικτό ορθογώνιο και ένα ανοικτό ορθογώνιο είναι μία ένωση ανοικτών σφαιρών άρα ως εκ τούτου η τοπολογία γινομένου R^n είναι ακριβώς η Ευκλείδεια τοπολογία.

19. Έστω $A = (0, 1)$ και $B = (0, 1)$. Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο $R \times R$ τα σύνολα $\text{Int}(A \times B)$, $\text{Cl}(A \times B)$ και $\text{Bd}(A \times B)$.

Λύση

$$\text{Int}(A) = \text{Int}(B) = (0, 1)$$

$$\text{Cl}(A) = \text{Cl}(B) = [0, 1]$$

$$\text{Άρα, } \text{Cl}(A \times B) = \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B) = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B) = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$\text{Bd}(A \times B) = (\text{Cl}(A) \times \text{Bd}(B)) \cup (\text{Bd}(A) \times \text{Cl}(B)) = ([0, 1] \times (0, 1)) \cup ((0, 1) \times [0, 1])$$

20. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο φυσικών χώρων μπορεί να μην είναι φυσικός.

Λύση

Έστω δύο φυσικοί τοπολογικοί χώροι $X=\{\alpha,\beta\}$ και $Y=\{\gamma,\delta\}$ με τις τοπολογίες $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{\alpha\}, \{\beta\}\}$ και $\tau_2 = \{\emptyset, Y, \{\gamma\}, \{\delta\}\}$ αντίστοιχα. Αρκεί να κάνουμε το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ και θα δείξουμε ότι δεν είναι φυσικοί χώροι. Αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Ασκήσεις στους συμπαγείς χώρους

21. Να αποδειχθεί ότι ο υπόχωρος Q των ρητών αριθμών του R δεν είναι τοπικά συμπαγής.

Λύση

Ανάμεσα σε κάθε ρητό υπάρχει ένας άρρητος με τον όρισμό της τοπικής συμπαγείας δεν υπάρχει συμπαγείς περιοχής. Ως εκ τούτου δεν είναι τοπικά συμπαγής.

22. Να αποδειχθεί ότι ο Ευκλείδειος χώρος $R^n, n = 2, 3, \dots$, είναι τοπικά συμπαγής.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη διαφορική γεωμετρία μία n -διάστατη πολλαπλότητα είναι Hausdorff χώρος. Ξέρουμε ότι με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος ότι ένας Hausdorff χώρος X είναι τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν κάθε σημείο του X έχει συμπαγή περιοχή. Άρα το R^n με $n=2,3,4, \dots$ είναι τοπικά συμπαγής.

23. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος γινόμενο $\prod\{X_i: i \in I\}$ είναι τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν όλοι οι χώροι $X_i, i \in I$, είναι τοπικά συμπαγείς και το πολύ πεπερασμένο πλήθος από αυτούς δεν είναι συμπαγείς.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η ισχύει. Δίνεται $\{x_i\} \in \prod_i X_i$ για κάθε το πολύ πεπερασμένα X_i αλλά δεν είναι συμπαγή, διαλέγω μια σχετικά συμπαγή περιοχή $V_{i_k}(x_{i_k})$ τότε το $\langle V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \rangle$ είναι μία περιοχή του $\{x_i\}$ και η κλειστή θήκη του $\langle V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \rangle$ είναι ίσο με τις επιμέρους κλειστές θήκες όπου είναι συμπαγείς.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\prod_i X_i$ είναι τοπικά συνεκτικό. Το π_i είναι μία συνεχή ανοικτή προβολή για κάθε X_i είναι τοπικά συμπαγής. Αλλά διαλέγουμε οποιαδήποτε ανοικτό συμπαγές $V \subset \prod_i X_i$ για κάθε συμπαγές $\pi_i(Cl(V))$ και το $\pi_i(Cl(V)) = X_i$ το οποίο θέλαμε να δείξουμε.

24. Να αποδειχθεί ότι κάθε τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος είναι Tychonoff.

Λύση

Έστω (X, τ) είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος και ο (Y, σ) είναι συμπαγοποίηση Alexandroff του (X, τ) . Αφού ο (Y, σ) είναι συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε η σ είναι normal τοπολογία. Από το λήμμα του Urysohn ο (Y, σ) είναι Tychonoff (T_1 και $T_{3\frac{1}{2}}$ - χώροι). Τότε ο (X, τ) υπόχωρος ενός Tychonoff χώρος είναι completely regular space.

25. Να βρεθεί ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ η οποία είναι δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Λύση

Το $Q = \{(\frac{1}{n}, 1) \mid n=2, \dots, \infty\}$ και $Q = \{(0, \frac{1}{2}), (0, \frac{2}{3}), (0, \frac{3}{4}), \dots\}$ αυτές είναι οι δύο ανοικτές καλύψεις. Αλλά και το $G_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ με $n = 1, 2, 3, \dots$.

26. Έστω $X=(0, 1)$ ο υπόχωρος του Ευκλειδίου χώρου R . Να κατασκευασθούν δύο συμπαγοποιήσεις του X που δεν είναι ομοιόμορφες.

Λύση

Για να το δείξω αυτό θα χρησιμοποιήσω το παρακάτω θεώρημα. Εάν έχω μία f συνεχή και ένα προς ένα συνάρτηση από το X που είναι συμπαγές και το Y που είναι Hausdorff. Τότε το X είναι ομοιόμορφο με το $f(X)$.

1. Το $X=(0, 1)$ με το $f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
2. Το $X=(0, 1)$ με το R^n .

27. Να δοθεί παράδειγμα συμπαγούς υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου X που δεν είναι κλειστό.

Λύση

Παίρνω το R και με βάση τα κλειστά διαστήματα.

Ασκήσεις στους συνεκτικούς χώρους

28. Να αποδειχθεί ότι κάθε κλειστός δίσκος του R^2 είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^2 .

Λύση

Ας σκεφτούμε έναν κλειστό δίσκο (κύκλο) που έχει στη περιφέρεια του δίσκου δύο σημεία a και d τα οποία ενώνονται μεταξύ τους με έναν δρόμο. Το οποίο είναι συνεκτικό κατά δρόμο άρα είναι συνεκτικό.

29. Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του R^2 . Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $R^2 \setminus A$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^2 .

Λύση

Αφού το A είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του R^2 , τότε ο χώρος $R^2 \setminus A$ είναι συνεκτικός κατά δρόμο. Αλλά εάν a και b είναι δύο σημεία του $R^2 \setminus A$. Επομένως, το $R^2 \setminus A$ περιέχει μη αριθμήσιμες ευθείες που διέρχονται από τα σημεία a και b και αν τα ενώσουμε μας δίνει ένα τόξο με άκρα το a και b . Το οποίο δείξαμε.

30. Έστω $X=\{a, b, c\}$. Να δοθούν όλες οι τοπολογίες τ επί του X έτσι ώστε ο χώρος (X, τ) να είναι συνεκτικός.

Λύση

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος συνεκτικός θα πρέπει τα μοναδικά ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του X να είναι το \emptyset και το X .

Οι τοπολογίες που έχουμε είναι:

- $\tau = \{\emptyset, X\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$
- $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c\}\}$

Για να δείξω ότι είναι συνεκτικός ο χώρος μου αρκεί να βρω την συμπληρωματική τοπολογία. Αλλά ένα παράδειγμα θα μας πείσει. Ας πάρω την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ και θα βρω την $\tau' = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ με $\tau \cap \tau' = \{\emptyset, X\}$. Άρα με βάση τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως για το συνεκτικό βλέπουμε στην πράξη να ισχύει.

31. Να δοθεί παράδειγμα χώρου που είναι συνεκτικός και δεν είναι συνεκτικός κατά δρόμο.

Λύση

Το παράδειγμα θα το δώσουμε μέσω της K -τοπολογίας (K -topology). Άρα ο τοπολογικός χώρος (R, τ) είναι συνεκτικός κατά δρόμο αλλά δεν είναι συνεκτικός κατά δρόμο και έχει δύο μονοπάτια-δρόμοι το $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$.

32. Να αποδειχθεί ότι αν X, Y τοπικά συνεκτικοί χώροι, τότε και ο χώρος γινομένου $X \times Y$ είναι τοπικά συνεκτικός.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τοπικά συνεκτικός εάν έχει βάση από ανοικτά συνεκτικά σύνολα. Αφού οι X, Y είναι τοπικά συνεκτικοί χώροι με τις αντίστοιχες βάσεις B και B^* , τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G, H τα οποία τα $G \in B$ και $H \in B^*$ και το πεπερασμένο γινόμενο $X \times Y$ που αποτελείται από τοπικά συνεκτικούς χώρους είναι το $\{G \times H: G \in B \text{ και } H \in B^*\}$ είναι βάση για το χώρο γινομένου $X \times Y$. Τώρα κάθε $G \times H$ είναι συνεκτικό αφού τα G, H συνεκτικά. Αφού το $X \times Y$ έχει συνεκτικές βάσεις τότε ο χώρος γινομένου είναι τοπικά συνεκτικός.

33. Να εξετασθεί αν οι υπόχωροι του R^3 που φαίνονται στα σχήματα 7.2, 7.3 και 7.4 είναι συνεκτικοί

Λύση

Η εικόνα 7.3 δεν είναι συνεκτικό αφού δεν μπορώ να βρω εάν δρόμο που να με πηγαίνει από την σφαίρα στον τόρο. Η εικόνα 7.4 είναι συνεκτική αφού μπορώ να πάω από τον έναν τόρο στον άλλο και άρα έχουμε ένα δρόμο. Τέλος, η εικόνα 7.2 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις : α) εάν τέμνονται οι τόροι τότε είναι συνεκτικό για τον ίδιο λόγο, β) εάν δεν τέμνονται οι τόροι δεν είναι συνεκτικοί καθώς δεν υπάρχει δρόμος που να ενώνει τους τρεις τόρους μεταξύ τους.

Ασκήσεις στα προβλήματα μετρικών και τοπολογικών χώρων

34. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο Cantor είναι χώρος διάστασης μηδέν.

Λύση

Let a Cantor set K . The set K_n is the disjoint union of 2^n segments $\sum_n(i)$, $1 \leq i \leq 2^n$ which are clopen in K_n . Let us set $U_n(i) = K \cap \sum_n(i)$ the family $a_n = (U(i))_{1 \leq i \leq 2^n}$ is a finite open partition of K . Therefore, we have $\text{ord}(a_n) = 0$. As $\text{mesh}(a_n) = \frac{1}{3^n}$ tends to 0 as n goes to infinity, we deduce that $\dim(K) = 0$.

35. Να αποδειχθεί ότι αν ένας χώρος X είναι T_1 -χώρος, τότε το σύνολο 2^X με την Vietoris τοπολογία είναι T_1 -χώρος.

Λύση

Suppose $A \neq B$ are two different points in $H(X)$. So we can assume that $\exists x \in A, x \notin B$ (by symmetry, or we rename our sets). Then $X \setminus B$ is open, $A \in [X \setminus B]$ (as witnessed by x), $B \notin [X \setminus B]$ by definition, and $X \setminus \{x\}$ is open as X is T_1 and $B \in (X \setminus \{x\})$ and $A \notin (X \setminus \{x\})$, as witnesses by x again.

So for two points we have open sets that contain one and not the other. So $H(X)$ is T_1 .

