Πάνος Μπίτσιος
μαθηματικός

09/06/2018 - Μαθηματικά Γ' ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α| Α1. (α) Σχ. Βιβλίο, σελίδα 65 (συχνότητα ν_i) (3)
(β) Σχ. Βιβλίο, σελίδα 65 (σχετική συχν. f_i) (3)
(γ) Απόδειξη: $f_1+f_2+\dots+f_k=1$ (σελίδα 65). (4)

Α2. Σχ. Βιβλίο, σελίδα 22 (Παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0\in A$). (5)

Α3. (α) Σ (β) Λ (γ) Λ (δ) Σ (ε) Λ (10)

ΘΕΜΑ Β| 14, 12, 18, $4\alpha-1$, 16 με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β1 Έχουμε 5 παρατηρήσεις (περιττό το πλήθος τους).
Άρα η διάμεσος (δ) αποτελεί την μεσαία παρατήρηση
(αποτελεί δηλαδή, παρατήρηση), την $t_3=15$.

Έχουμε: $t_3=15 \Leftrightarrow 4\alpha-1=15 \Leftrightarrow \frac{4\alpha}{4}=\frac{16}{4} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=4}$. (7)

Β2 Για $\alpha=4$, έχουμε τις παρατηρήσεις: 12, 14, 15, 16, 18.

Για να υπολογίσουμε τη διακύμανση (s^2), πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των 5 παραπάνω παρατηρήσεων:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{5}=\frac{12+14+15+16+18}{5}=\frac{75}{5}=\boxed{15}$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{x})^2}{\nu}=\frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{5}=$$

$$=\frac{9+1+0+1+9}{5}=\frac{20}{5}=\boxed{4} \quad (7)$$

Β3 Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ή όχι, ομοιογενές, απαραίτητος είναι ο υπολογισμός του συντελεστή μεταβολής $CV=\frac{s}{\bar{x}}$.

$s = \sqrt{s^2} \Leftrightarrow s = \sqrt{4} \Leftrightarrow \boxed{s = 2}$

άρα $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} = 0,133\ldots \simeq 13,3\ \%$

Επομένως, το δείγμα μας δεν είναι ομοιογενές, διότι $CV > 10\ \%$. (5)

B4. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_5$ οι αριθμοί που μας δίνονται αρχικά, τότε σύμφωνα με την εκφώνηση στο (B4) ερώτημα, είναι:

$y_i = -2 \cdot x_i + 5$, για $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Επομένως, για να υπολογίσουμε το νέο συντελεστή μεταβολής CV_y, θα βρούμε $\bar{y}$ και s_y.

$\bar{y} = -2 \cdot \bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$.

$s_y = |-2| \cdot s = 2 \cdot 2 = 4$.

Τελικά: $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\ \%$. (6)

~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

ΘΕΜΑ Γ] $f(x) = 2x^3 - 3\kappa\cdot x^2 + \kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, συνεπώς, ισχύει:

$f'(1) = 0$. Βρίσκω την $f'(x)$.

$f'(x) = 6x^2 - 6\kappa\cdot x$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα:

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 6-6\kappa=0 \Leftrightarrow \frac{-6\kappa}{-6}=\frac{-6}{-6} \Leftrightarrow \boxed{\kappa=1}.$$

(5)

Γ2. Για $\kappa=1$, η συνάρτησή μας παίρνει τη μορφή:
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $A_f=\mathbb{R}$.

Αναζητούμε την τιμή του x, για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$, γίνεται ελάχιστος. Άρα:

$f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x\in\mathbb{R}$, $f''(x) = 12x - 6$, $x\in\mathbb{R}$
Λύνω την εξίσωση:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x-6=0 \Leftrightarrow 12x=6 \Leftrightarrow \boxed{x=1/2}.$$

Κατασκευάζω τον πίνακα:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	(Ε)	↗	

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για $x=\frac{1}{2}$, ο ρυθμός μεταβολής της f, δηλαδή το $f'(x)$, γίνεται ελάχιστος.
(ο ρυθμός μεταβολής ελαχιστοποιείται). (10)

Γ3. Αναζητώ την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f', στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Δηλαδή τη $(\zeta) : y = \alpha \cdot x + \beta$.

$\alpha = f''(-1) = -12 - 6 = -18$ άρα $\zeta : y = -18 \cdot x + \beta$.

Επίσης, το σημείο $(-1, f'(-1))$ επαληθεύει τη (ζ).

$f'(-1) = 6 + 6 = 12$, $(-1, 12)$. Άρα:

$12 = -18 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow$

$12 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Τελικά, η εφαπτομένη (ζ) της $C_{f'}$ έχει την μορφή:

$$\boxed{\zeta : \quad y = -18 \cdot x - 6}.$$

(10)

~ ~ ~ ~ ~ ~

ΘΕΜΑ Δ| $f(x)=\sqrt{x^2+4}+2018$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot(x^2+4)'+0=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ x\in\mathbb{R}.$$

(6)

Δ2 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύνω την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$.

Κατασκευάζω τον πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Σημείωση: Το πρόσημο της f' εξαρτάται από τον αριθμητή x, διότι ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η $f\downarrow(-\infty,0]$, ενώ η $f\uparrow[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$, τοπικό (και ολικό) ελάχιστο, το $f(0)=2+2018=2020$. (9)

Δ3. Υπολογίζω το όριο:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)\cdot f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{x}{\cancel{\sqrt{x^2+4}}}-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)\cdot(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cancel{+4}\cancel{-4}}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{4}=\boxed{0}.$$

(10)