Κεφάλαιο 5

8. Έστω A= [0,1) και B=(0,1]. Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=[0,1]

Cl(B)=[0,1]

Int(A)=(0,1)

Int(B)=(0,1)

Cl(AxB)= Cl(A)x Cl(B)=[0,1]x[0,1]

Int(AxB)= Int(A)x Int(B)=(0,1)x(0,1)

Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B))∪ $\big(Cl(B)xBd(A)\big)$.

9. Έστω A= (0,1) και B=(0,1). Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=[0,1]

Cl(B)=[0,1]

Int(A)=(0,1)

Int(B)=(0,1)

Cl(AxB)= Cl(A)x Cl(B)=[0,1]x[0,1]

Int(AxB)= Int(A)x Int(B)=(0,1)x(0,1)

Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B)) ∪ $(Cl(B)xBd(A))$.

10. Έστω A={0,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,...}και B={0,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,...}.Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=A Int(A)={1/n} Cl(B)=B Int(B)={1/n} (Τα υπόλοιπα για τον αναγνώστη όπως στην 9).

11. Έστω A=[0,1]και B=$\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$.Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

<u>Λύση</u>

Cl([0,1])=[0,1] Int([0,1])=(0,1) Cl(B)=B Int(B)={1/n} (Τα υπόλοιπα για τον αναγνώστη όπως στην 9)

12.Να βρεθούν στο χώρο **RxR** τα σύνολα Int(QxQ), Cl(QxQ) και Bd(QxQ).

<u>Λύση</u>

Cl(Q)=R

Int(Q)=∅

Cl(QxQ)= Cl(Q)x Cl(Q)=RxR

Int(QxQ)= Int(Q)x Int(Q)=∅x∅

Bd(QxQ)=(Cl(Q)xBd(Q)))∪(Cl(Q)xBd(Q)).

13. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(QxR), Cl(QxR) και Bd(QxR).

<u>Λύση</u>

Cl(Q)=R Int(Q)=∅ Cl(R)=R Int(R)=∅

Cl(QxR)= Cl(Q)x Cl(R)=RxR

Int(QxR)= Int(Q)x Int(R)=$\emptyset x\emptyset$

Bd(QxR)=(Cl(Q)xBd(R)) ∪(Cl(R)xBd(Q)).

14. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(NxQ), Cl(NxQ) και Bd(NxQ).

<u>Λύση</u>

Cl(Q)=R Int(Q)= ∅ Cl(N)=N Int(N)= ∅

Cl(QxN)= Cl(Q)x Cl(N)=RxN

Int(QxN)= Int(Q)x Int(N)=$\emptyset x\emptyset$

Bd(QxN)(κοίτα 13).

15. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(NxR), Cl(NxR) και Bd(NxR).

<u>Λύση</u>

Με τη βοήθεια των 13 και 14.

17. Έστω A= [0,1]x [0,1]. Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο RxR τα σύνολα Int(A), Cl(A) και Bd(A).

Λύση

Cl(A)= Cl([0,1])x Cl([0,1])=[0,1]x[0,1]

Int(A)= Int([0,1])x Int([0,1])= (0,1)x(0,1)

Bd([0,1]x[0,1]) (κοίτα 8 όπως στην άλλη).

19.Έστω A υποσύνολο του τοπολογικού χώρου X και B υποσύνολο του τοπολογικού χώρου Y. Να αποδειχθεί ότι στο χώρο γινόμενο XxY ισχύουν τα εξής:

(1) Int(AxB)= Int(A)x Int(B)

(2) Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B))∪ $(Bd(A)xCl(B))$

Λύση

(1) Bd(AxB)= Cl(AxB)\Int(AxB)= Cl(A)x Cl(B)\(Int(A)x Int(B))=(Cl(A)\Int(A)XB)∪(Ax(Cl(B)\Int(B)))= (Cl(A)xBd(B))∪(Bd(A)xCl(B)).
(2) Για να δείξω την ισότητα πρέπει να δείξω την ⊃, ⊂.Η σχέση ⊂ είναι προφανής. Το ⊃ εάν z=(x,y)ϵInt(AxB) τότε το z έχει μια στοιχειώδη περιοχή zϵW=UxV⊂AxB,όπου αυτό συμαίνει ότι το x έχει μία ανοικτή περιοχή U_x ⊂A και V_y⊂B άρα xϵIntA και yϵIntB άρα z=(x,y)ϵInt(AxB).

20.Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι, p:XxY→ X, q:XxY→ Y η πρώτη και η δεύτερη προβολή αντίστοιχα.Να αποδειχθεί ότι αν U_1 ανοικτό υποσύνολο του X και U_2 ανοικτό υποσύνολο του Y τότε:
(α)$p^{-1}(U_1) = U_1 \times Y$
(b)$q^{-1}(U_2) = X \times U_2$
(c)$p(U_1 \times U_2) = U_1$
(d)$q(U_1 \times U_2) = U_2$
Λύση
(α) $p^{-1}(U_1)$={zϵXxY|p(z)ϵU_1}={(x,y)ϵXxY|xϵU_1}=U_1xY
(b)η ίδια με το (α).
(c)p($U_1 \times U_2$)={με βάση τον ορισμό}.
(d)ίδια λύση με το (c).

22.Να αποδειχθεί ότι το σύνολο Δ={(α,…,α)ϵX^n:αϵX} είναι κλειστό υποσύνολο του X^n. Όπου X τοπολογικός χώρος και n φυσικός αριθμός.
Λύση
Έστω (χ,y)∉Δ. Τότε τα σημεία χ,y με τα αντίστοιχα ανοιχτά όπου $U_\chi \cap V_y = \emptyset$,τότε $(U_\chi x V_y) \cap \Delta = \emptyset$.Το $U_x x V_y \subset XxY \backslash \Delta$ άρα το Xx…xX\Δ είναι ανοικτό.

23. Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι, A⊆X και B⊆Y. Να αποδειχθεί ότι γενικάδεν ισχύει ο τύπος:

$(X\text{x}Y)\backslash(A\text{x}B)=(X\backslash A)\text{x}(Y\backslash B)$

<u>Λύση</u>

Για να ισχύει θα πρέπει:

$(X\text{x}Y)\backslash(A\text{x}B)=(X\backslash A\text{x}Y)\cup(Y\backslash B\text{x}X)$.