Τανυστικη Αναλυση και Γεωμετρια
Ασκήσεις 1

1. Θεωρούμε τις διαφορικές μορφές του $\mathbb{R}^3$ $\alpha = xdx - ydy$, $\beta = zdxdy + xdydz$, $\gamma = zdy$. Υπολογίστε τις μορφές

i) $a \wedge \beta$, $a \wedge \beta \wedge \gamma$, ii) $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

2. Υπολογίστε την εξωτερική παράγωγο των παρακάτω μορφών:

i) $e^{xy+z^2}dx$, ii) $\sum_{i=1}^n x_i^2 dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$.

Το σύμβολο $\widehat{\cdot}$ σημαίνει ότι ο αντίστοιχος όρος παραλείπεται.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Υπολογίστε την εξωτερική παράγωγο $d \sin f(x)^2$.

4. Ορίζουμε τις συναρτήσεις ξ, η ως

$$\xi(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \eta(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και θεωρούμε τη γωνιακή διαφορική μορφή $\alpha_0 = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. Αποδείξτε ότι $\alpha_0 = -\eta d\xi + \xi d\eta$.

5. Έστω ο $\mathbb{R}^{2n}$ με συντεταγμένες $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ και έστω

$$\omega = dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + \cdots + dx_ndy_n = \sum dx_idy_i.$$

Υπολογίστε τη μορφή $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$. (Υπόδειξη: Αρχίστε με τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3$).

6. Έστω ο $\mathbb{R}^{2n+1}$ με συντεταγμένες $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, z)$ και έστω

$$\alpha = dz + x_1dy_1 + x_2dy_2 + \cdots + x_ndy_n = dz + \sum x_idy_i.$$

Υπολογίστε τη μορφή $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge (d\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha)$

7. Ελέξτε ποιά από τις παρακάτω μορφές $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ είναι κλειστή και σε θετική απάντηση βρείτε συνάρτηση g ώστε $dg = \alpha$.

i) $\alpha = (ye^{xy} - z\sin(xz))dx + (xe^{xy} + z^2)dy + (-x\sin(xz) + 2yz + 3z^2)dz$,

ii) $\alpha = 2xy^3z^4dx + (3x^2y^2z^4 - ze^y\sin(ze^y))dy + (4x^2y^3z^3 - e^y\sin(ze^y) + e^z)dz$.

8. Έστω $\alpha = \sum_{i=1}^n f_idx_i$ μια κλειστή 1-μορφή στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3, \ldots, x_n)dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t, x_3, x_4, \ldots, x_n)dt + \\ &\quad \int_0^{x_3} f_3(0, 0, t, x_4, x_5, \ldots, x_n)dt + \cdots + \int_0^{x_n} f_n(0, 0, \ldots, t)dt. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι $dg = \alpha$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$ και ότι $d\alpha = 0$. Ίσως μελετήστε αρχικά την περίπτωση $n = 2$ όπου $g(x) = \int_o^{x_1} f_1(t, x_2)dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t)dt$).

9. Έστω α, β κλειστές μορφές. Αποδείξτε ότι η μορφή $\alpha \wedge \beta$ είναι κλειστή.

10. Έστω α κλειστή και β ακριβής. Αποδείξτε ότι η μορφή $\alpha \wedge \beta$ είναι ακριβής.

11. Για τις διαφορικές μορφές της Άσκησης 1 υπολογίστε τις μορφές

$$*\alpha, *\beta, *\gamma, *(\alpha \wedge \beta).$$

12. Έστω $\alpha = x_1dx_2 + x_3dx_4$, $\beta = x_1x_2dx_3dx_4 + x_3x_4dx_1dx_2$, $\gamma = x_2dx_1dx_3dx_4$ διαφορικές μορφές στον $\mathbb{R}^4$. Υπολογίστε τις εξής μορφές:

i) $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \gamma$, ii) $d\beta$, $d\gamma$, iii) $*\alpha$, $*\gamma$.

13. Έστω $\alpha = -x_2^2dx_1 + x_1^2dx_2 \in \Omega(\mathbb{R}^2)$.

i) Υπολογίστε τις μορφές $*\alpha$, $*d*d\alpha$ $(= *(d(*(d\alpha)))))$.

ii) Το ίδιο ερώτημα όπως το i) αν $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

iii) Το ίδιο ερώτημα όπως το i) αν $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$.

14. Δείξτε ότι για κάθε k-μορφή α του $\mathbb{R}^4$ ισχύει $**\alpha = (-1)^{kn+k}\alpha$.

15. Έστω $\alpha = \sum_I a_Idx_I$ και $\beta = \sum_J b_Jdx_J$ σταθερές k-μορφές στον $\mathbb{R}^n$ (δηλ. οι a_I, B_J είναι σταθερές συναρτήσεις). Υποθέτουμε ότι οι πολυδείκτες I, J είναι αύξοντες. Ορίζουμε ένα *εσωτερικό γινόμενο* των α, β τον αριθμό

$$(\alpha, \beta) = \sum_I a_Ib_I.$$

Για παράδειγμα, αν $\alpha = 7dx_1dx_2 + \sqrt{2}dx_1dx_3 + 11dx_2dx_3$, $\beta = 5dx_1dx_3 - 3dx_2dx_3$, τότε $(\alpha, \beta) = \sqrt{2} \cdot 5 + 11 \cdot (-3) = 5\sqrt{2} - 33$.

Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες:

i) Οι μορφές dx_I αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου των σταθερών k-μορφών.

ii) $(\alpha, \alpha) \geq 0$ για κάθε α και $(\alpha, \alpha) = 0$ εάν και μόνο εάν $\alpha = 0$.

iii) $\alpha \wedge (*\beta) = (\alpha, \beta)dx_1dx_2 \cdots dx_n$.

iv) $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.

v) Ο τελεστής Hodge είναι ορθογώνιος, δηλ. ισχύει $(\alpha, \beta) = (*\alpha, *\beta)$.

16. Η *Λαπλασιανή* Δf μιας λείας συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Αποδείξτε τις εξής σχέσεις:

i) $\Delta f = *d*df$.

ii) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + f\Delta g + 2*(df(*dg))$. (Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 15 iv)).

17. Έστω $\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ 1-μορφή στον $\mathbb{R}^n$.

i) Βρείτε τύπους για τις μορφές $*\alpha, d*\alpha, *d*\alpha, d*d*\alpha$.

ii) Βρείτε τύπους για τις μορφές $d\alpha, *d\alpha, d*d\alpha, *d*d\alpha$.

iii) Υπολογίστε τη μορφή $d*d*\alpha + (-1)^n * d*d\alpha$. Προσπαθήστε να εκφράσετε την απάντηση με χρήση της Λαπλασιανής Δf.

Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 2

1. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$. Υπολογίστε τις μορφές:
i) $\phi^*(dy_1), \phi^*(dy_2), \phi^*(dy_3)$.
ii) $\phi^*(y_1y_2y_3), \phi^*(dy_1dy_2)$.
iii) $\phi^*(dy_1dy_2dy_3)$.

2. Έστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \phi(x_1, x_2) = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3)$. Υπολογίστε τις μορφές:
i) $\phi^*(y_1 + 3y_2 + 3y_4 + y_4)$.
ii) $\phi^*(dy_1), \phi^*(dy_2), \phi^*(dy_3), \phi^*(dy_4)$.
iii) $\phi^*(dy_2dy_3)$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Υπολογίστε την εξωτερική παράγωγο $d\sin f(x)^2$.

4. Έστω $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\psi(t) = \frac{1}{||t||^2 + 1}(2t + (||t||^2 - 1)e_3),$$

όπου $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ και το ταυτίζουμε με το $t = (t_1, t_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Υπολογίστε τη μορφή $\psi^*(xdydz + ydzdx + zdxdy)$.

5. Έστω $P(r, \theta, \phi) = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi)$ σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$. Υπολογίστε τη μορφή $P^*(\alpha)$, όπου α κάθε μία από τις παρακάτω μορφές:

$$dx,\ dy,\ dz,\ dxdy,\ dxdydz.$$

Τανυστικη Αναλυση και Γεωμετρια
Ασκήσεις 3

1. Θεωρούμε την καμπύλη $c : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a, b > 0$. Έστω $\alpha = xydx + x^2ydy$.

i) Σχεδιάστε την καμπύλη c για $a = 2$ και $b = 1$.

ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_c \alpha$.

2. Έστω $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ κλειστή 1-μορφή στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx)dt$$

ικανοποιεί τη σχέση $dg = \alpha$. (Εδώ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

3. Θεωρούμε την 1-μορφή $\alpha = ||x||^\lambda \sum_{i=1}^n x_i dx_i$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq 0$ έστω c_x το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το 0 και πέρας το x.

i) Δείξτε ότι η α είναι κλειστή μορφή, για κάθε τιμή του λ.

ii) Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση $g(x) = \int_{c_x} \alpha$ είναι καλά ορισμένη και υπολογίστε αυτή αναλυτικά.

iii) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ii) αποδείξτε ότι $dg = \alpha$.

Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 4

1. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $\phi : U \to V$ λεία. Έστω c ένας k-κύβος στο U και α μια k-μορφή στο V. Αποδείξτε ότι $\int_c \phi^*(\alpha) = \int_{\phi\circ c} \alpha$.

2. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

i) Έστω b μια $k+1$-αλυσίδα στο U. Έχουμε ορίσει το σύνορο της b ως ένας γραμμικός συνδυασμός από k-κύβους, $\partial b = \sum_i a_i c_i$. Αποδείξτε ότι $\sum_i a_i = 0$.

ii) Έστω c ένας k-κύβος στο U. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $(k+1)$-αλυσίδα b στο U που να ικανοποιεί $\partial b = c$.

3. Ορίζουμε τον 2-κύβο $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $c(t_1,t_2) = (t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$ και έστω $\alpha = x_1dx_2 + x_1dx_3 + x_2dx_3$.

i) Σχεδιάστε την εικόνα του κύβου c.

ii) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_c d\alpha$ και $\int_{\partial c} \alpha$ και διαπιστώστε ότι είναι ίσα.

4. Ορίζουμε τον 3-κύβο $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$, $c(t_1,t_2,t_3) = (t_2t_3, t_1t_3, t_1t_2)$ και έστω $\alpha = x_1dx_2dx_3$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_c d\alpha$ και $\int_{\partial c} \alpha$ και διαπιστώστε ότι είναι ίσα.

5. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Stokes για να αποδείξετε τα παρακάτω κλασικά ολοκληρωτικά θεωρήματα. Όλες οι συναρτήσεις, διανυσματικά πεδία, αλυσίδες κλπ είναι διαφορίσιμες ποσότητες και ορίζονται σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$. (Κάποιοι τύποι ισχύουν για συγκεκριμένες τιμές του n).

i) $\int_c \mathrm{grad}(g)\cdot d\mathbf{x} = g(c(1)) - g(c(0))$ για κάθε συνάρτηση g και κάθε καμπύλη c.

ii) Τύπος του Green: $\int_c \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial c}(fdx + gdy)$ για κάθε συναρτήσεις f, g και κάθε 2-αλυσίδα c. (Εδώ $n = 2$).

iii) Τύπος του Gauss: $\int_c \mathrm{div}(\mathbf{F}) dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_{\partial c} \mathbf{F} \cdot *d\mathbf{x}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ και κάθε n-αλυσίδα c.

iv) Τύπος του Stokes: $\int_c \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot *d\mathbf{x} = \int_{\partial c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ και κάθε 2-αλυσίδα c. (Εδώ $n = 3$).

Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 5

1. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\psi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Αποδείξτε ότι η ψ είναι 1-1. Δείξτε ότι η εικόνα $\psi(\mathbb{R})$ δεν είναι πολλαπλότητα στα σημεία που αποτελούν λύση της $\psi'(t) = 0$.

2. Έστω $a \in (0, 1)$ σταθερά. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = (t - a\sin t, 1 - a\cos t)$ είναι εμφύτευση. (Υπόδειξη: Ίσως δείξτε πρώτα ότι η $t - a\sin t$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t). Σχεδιάστε εικόνα της ψ.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$ είναι εμφύτευση. Συμπεράνετε ότι η εικόνα $M = \psi(\mathbb{R})$ είναι πολλαπλότητα διάστασης 1. Σχεδιάστε την καμπύλη M. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της M στο σημείο $(1, 0)$ και την καρτεσιανή εξίσωση της M.

4. Έστω $I = (-1, \infty)$ και $\psi : I \to \mathbb{R}^2$, $\psi(t) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$, όπου $a \neq 0$. Δείξτε ότι η ψ είναι 1-1 και ότι $\psi'(t) \neq (0, 0)$ για κάθε $t \in I$. Είναι η ψ εμφύτευση; Είναι η εικόνα $\psi(I)$ πολλαπλότητα;

5. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\psi(t) = \begin{cases} (-f(t), f(t)), & t \leq 0 \\ (f(t), f(t)), & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-1/x^2}, x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η ψ είναι λεία, 1-1 και ότι η αντίστροφη $\psi^{-1} : \psi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Σχεδιάστε την εικόνα $\psi(\mathbb{R})$. Είναι η $\psi(\mathbb{R})$ πολλαπλότητα;

6. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\psi(t_1, t_2) = (t_1^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2, t_2^3)$.

i) Δείξτε ότι η ψ είναι 1-1.

ii) Δείξτε ότι το διαφορικό $D\psi(t)$ είναι 1-1, για κάθε $t = (t_1, t_2) \neq (0, 0)$.

iii) Έστω $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Δείξτε ότι η $\psi : U \to \mathbb{R}^4$ είναι εμφύτευση και συμπεράνετε ότι η εικόνα $\psi(U)$ είναι πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2.

iv) Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου της εικόνας $\psi(U)$ στο σημείο $\psi(1, 1)$.

7. i) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\psi : U \to \mathbb{R}^N$ λεία απεικόνιση. Η *εφαπτόμενη απεικόνιση* της ψ είναι η απεικόνιση $T\psi : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}$, $T\psi(t, u) = (\psi(t), D\psi(t)u)$, $t \in U$, $u \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη απεικόνιση μιας εμφύτευσης είναι εμφύτευση.

ii) Έστω M πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^N$ διάστασης n. Η *εφαπτόμενη δέσμη* της M είναι το υποσύνολο TM του $\mathbb{R}^{2N}$, $TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2N} : x \in M, v \in T_x M\}$. Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

8. Έστω $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0\}$.

i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $M \setminus \{(0,0)\}$ είναι πολλαπλότητα διάστασης 1.

ii) Βρείτε τα σημεία όπου η M έχει οριζόντιες και κάθετες εφαπτόμενες ευθείες.

iii) Σχεδιάστε το σύνολο M. (Αρχίστε βρίσκοντας τα σημεία τομής του M με ευθείες της μορφής $y = ax$).

iv) Είναι το σύνολο M πολλαπλότητα στο σημείο $(0,0)$;

9. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων.

i) Η *γενική γραμμική ομάδα* είναι το υποσύνολο του V

$$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : \det A \neq 0\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ είναι πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της·

ii) Ορίζουμε $\phi : V \to \mathbb{R}$, $\phi(A) = \det A$. Δείξτε ότι το διαφορικό της ϕ δίνεται ως

$$D\phi(A)B = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι τα διανύσματα-στήλες των A και B αντίστοιχα.

iii) Η *ειδική ορθογώνια ομάδα* είναι το υποσύνολο του V

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : \det A = 1\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της;

iv) Αν I είναι ο ταυτοτικός πίνακας, δείξτε ότι $D\phi(I)B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}B$. Συμπεράνετε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_I\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ ισούται με το σύνολο όλων των πινάκων με ίχνος μηδέν.

10. i) Έστω $W = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ και $\phi : W \to \mathbb{R}$, $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$. Αποδείξτε ότι το 0 είναι κανονική τιμή της ϕ.

ii) Έστω A πραγματικός 2×2 πίνακας. Αποδείξτε ότι $\mathrm{rk}A = 1$ εάν και μόνο εάν $\det A = 0$ και $A \neq 0$.

iii) Έστω M το σύνολο όλων των 2×2 πινάκων τάξης 1. Αποδείξτε ότι το M είναι πολλαπλότητα διάστασης 3.

iv) Υπολογίστε τον εφαπτόμενο χώρο T_AM στο σημείο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x) = (x_1 + x_2 + x_3x_4, x_1x_2x_3 + x_4)$, όπου $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

i) Δείξτε ότι το διαφορικό $D\phi(x)$ έχει τάξη 2 εκτός εάν το x ισούται με $(t^{-2}, t^{-2}, t, t^{-3})$, για κάποιο $t \neq 0$.

ii) Δείξτε ότι το σύνολο $M = \phi^{-1}(0,0)$ είναι μια πολλαπλότητα διάστασης 2.

iii) Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου T_xM στα σημεία $x = (x_1, x_2, 0, x_4)$.

Τανυστικη Αναλυση και Γεωμετρια
Ασκήσεις 6

1. Τα διανύσματα $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε τη δυϊκή βάση του $(\mathbb{R}^2)^*$.

2. Έστω μ μια k-πολυγραμμική συνάρτηση σε έναν διανυσματικό χώρο V. Υποθέτουμε ότι η μ ικανοποιεί την ιδιότητα $\mu(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$ όταν $v_i = v_j$ για κάποια $i \neq j$. Αποδείξτε ότι η μ είναι εναλλάσουσα.

3. Θεωρούμε τη διγραμμική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^4$, $\mu(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 + v_3 w_4 - v_4 w_3$. Δείξτε ότι η μ ισούται με $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

4. Έστω V διανυσματικός χώρος και $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in V^*$ γραμμικές μορφές. Το *τανυστικό γινόμενο* είναι η συνάρτηση $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_k : V^k \to \mathbb{R}$,

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mu_1(v_1)\mu_2(v_2) \cdots \mu_k(v_k).$$

Αποδείξτε ότι η $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ είναι k-πολυγραμμική συνάρτηση.

5. Έστω $\mu : V^k \to \mathbb{R}$ μια k-πολυγραμμική συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathrm{Alt}(\mu) : V^k \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Alt}(\mu)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma)\mu(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Αποδείξτε τα εξής:

i) Η συνάρτηση $\mathrm{Alt}(\mu)$ είναι εναλλάσουσα k-πολυγραμμική.
ii) Εάν η μ είναι εναλλάσουσα, τότε $\mathrm{Alt}(\mu) = \mu$.
iii) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\mu)) = \mathrm{Alt}(\mu)$, για κάθε k-πολυγραμμική μ.
iv) Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in V^*$. Τότε ισχύει ότι

$$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \cdots \wedge \mu_k = k!\mathrm{Alt}(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_k).$$

6. Αποδείξτε ότι

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

για κάθε $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

7. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι και $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι $L^*(\lambda \wedge \mu) = L^*(\lambda)L^*(\mu)$, για κάθε $\lambda, \mu \in W^*$.

Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 7

1. Θυμίζουμε το θεώρημα $\mathrm{vol}_n(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det(A^t A)}$, όπου A $N \times n$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$.

i) Δείξτε ότι το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $a, b \in \mathbb{R}^N$ ισούται με $||a|| \cdot ||b|| \sin\phi$, όπου ϕ η γωνία μεταξύ των a, b $(0 < \phi < \pi)$.

ii) Δείξτε ότι για $N = 3$ ισχύει $||a|| \cdot ||b|| \sin\phi = ||a \times b||$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε την ορίζουσα $\det(a, b, a \times b)$).

2. Έστω $u_1, u_2, \dots u_k$ και $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ διανύσματα του $\mathbb{R}^N$ που ικανοποιούν $\langle u_i, v_j \rangle = 0$, για $i = 1, 2, \dots, k$ και $j = 1, 2, \dots, \ell$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{vol}_{k+\ell}(u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_l) = \mathrm{vol}_k(u_1, \dots, u_k)\mathrm{vol}_\ell(v_1, \dots, v_l).$$