

2

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Συχνότητα v_i

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k = v$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά οι μαθητές του Γ3 πήραν τους παρακάτω βαθμούς:

12	17	18	15	18	17	15	18	17	20
15	17	15	17	12	20	17	18	12	15

ΒΑΘΜΟΣ x_i	ΔΙΑΛΟΓΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	
12		3	$= v_1$
15		5	$= v_2$
17		6	$= v_3$
18		4	$= v_4$
20		2	$= v_5$
ΣΥΝΟΛΟ		20	$v = 20$

Σχετική Συχνότητα f_i

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

(i) $0 \leq f_i \leq 1$

(ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

$(f_1\% + f_2\% + \dots + f_k\% = 100\%)$

$f_i\% = 100 \cdot f_i$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Δεδομένα από παράδειγμα 1

ΒΑΘΜΟΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	ΣΧΕΤ. ΣΥΧΝ. f_i	ΣΧΕΤ. ΣΥΧΝ. $f_i\%$
12	3	0,15	15
15	5	0,25	25
17	6	0,3	30
18	4	0,2	20
20	2	0,1	10
ΣΥΝΟΛΟ	20	1	100

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{3}{20} = 0,15 \quad \rightsquigarrow f_1\% = 100 \cdot f_1 = 100 \cdot 0,15 = 15\%$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \rightsquigarrow f_2\% = 25\%$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{6}{20} = 0,3 \quad \rightsquigarrow f_3\% = 30\%$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,20 \quad \rightsquigarrow f_4\% = 20\%$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,10 \quad \rightsquigarrow f_5\% = 10\%$$

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ N_i

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

- $N_1 = v_1$
- $N_k = v$
- $v_i = N_i - N_{i-1}$

από $N_i = \underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_{i-1}}_{N_{i-1}} + v_i$

$$N_i - N_{i-1} = v_i$$

$$F_i = \frac{N_i}{v}$$

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ F_i

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

$i=1, 2, \dots, k$

- $F_1 = f_1$, $F_1 \% = f_1 \%$
- $F_k = 1$, $F_k \% = 100$
- $f_i = F_i - F_{i-1}$

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_i}{v}$$

$$= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_i}{v} = \frac{N_i}{v}$$

▷ $F_i \% = 100 \cdot F_i$

- $F_i \% = f_1 \% + f_2 \% + \dots + f_i \%$
- $F_1 \% = f_1 \%$
- $F_k \% = 100$
- $f_i \% = F_i \% - F_{i-1} \%$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Διότινα από παράδειγμα 2

ΒΑΘΜΟΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤ. v_i	ΣΧ. ΣΥΧΝ f_i	ΣΧ. ΣΥΧΝ $f_i \%$	ΑΘΡΟΙΣΤ. ΣΥΧΝΟΤ. N_i	ΑΘΡΟΙΣΤ. ΣΧ. ΣΥΧΝ. F_i	ΑΘΡΟΙΣΤ. ΣΧ. ΣΥΧΝ $F_i \%$
12	3	0,15	15	3	0,15	15
15	5	0,25	25	8	0,4	40
17	6	0,3	30	14	0,7	70
18	4	0,2	20	18	0,9	90
20	2	0,1	10	20	1	100
ΣΥΜΜΕΝ	20	1	100			

A. Συμπλήρωση Στατιστικού Πίνακα

1 Για την εκλογή του προτιμότερου στο Γ3 νέου υποψήφιοι: η Ελίση (Ε), ο Κώστας (Κ), ο Τάσος (Τ), η Στέλλα (Σ) και ο Βασίλης (Β).

Υποθέτοντας ότι κάθε μαθητής ψήφισε έναν υποψήφιο, δίχαρι za παρακάτω αποτελέσματα:

Ε	Τ	Κ	Ε	Τ	Κ	Τ	Σ	Κ	Τ
Τ	Σ	Β	Τ	Σ	Τ	Ε	Τ	Β	Ε

Να κάνει τον πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων %

$x_1 = E$, $x_2 = K$, $x_3 = T$, $x_4 = \Sigma$, $x_5 = B$
 με τιμές μ τιμές μ τιμές μ τιμές μ τιμές μ

Υποψήφιοι x_i	Διαδοχή	n_i	f_i	$f_i \%$
Ε		4	0,2	20%
Κ		3	0,15	15%
Τ		8	0,4	40%
Σ		3	0,15	15%
Β		2	0,1	10
ΣΥΝΟΛΟ	 	20	1	100

$$f_1 = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,2 \rightsquigarrow f_1 \% = 100 \cdot f_1 = 100 \cdot 0,2 = 20\%$$

$$f_2 = \frac{3}{20} = \frac{1,5}{10} = 0,15 \rightsquigarrow f_2 \% = 100 \cdot 0,15 = 15\%$$

$$f_3 = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0,4 \rightsquigarrow f_3 \% = 40\%$$

$$f_4 = \frac{3}{20} = \frac{1,5}{10} = 0,15 \rightsquigarrow f_4 \% = 15\%$$

$$f_5 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \rightsquigarrow f_5 \% = 10\%$$

2 Να συμπληρώσεις τους παρακάτω πίνακες.

a)

x_i	v_i
0	5
1	15
2	8
3	12
ΣΥΝΟΛΟ	40

x_i	v_i
1	$k=2$
2	$k^2=4$
3	$3k=12$
4	8
ΣΥΝΟΛΟ	20

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = V$$

$$\Leftrightarrow 5 + 15 + v_3 + 12 = 40$$

$$\Leftrightarrow 32 + v_3 = 40$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 40 - 32$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 8$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = V$$

$$\Leftrightarrow k + k^2 + 3k + 8 = 20$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k + 8 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$$
$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$k_1 = \frac{-4-8}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \quad \text{Απορριπτεται } k > 0$$

$$k_2 = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad (k=2)$$

3) Να συμπληρώσετε τους πίνακες

$$f_i = \frac{v_i}{v}$$

a)

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
x_1	7	0,14	14
x_2	5	0,1	10
x_3	15	0,30	30
x_4	14	0,28	28
x_5	9	0,18	18
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	100

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$$

$$v = 7 + 5 + 15 + 14 + 9$$

$$v = 50$$

$$f_1 = \frac{7}{50} = 0,14 \rightarrow f_1\% = 14\% \quad \left(\begin{array}{l} f_i\% = 100 \cdot f_i \\ = 100 \cdot \frac{v_i}{v} \\ = 100 \cdot \frac{15}{50} \\ = 2 \cdot v_i \end{array} \right)$$

$$f_2 = \frac{5}{50} = 0,1 \rightarrow f_2\% = 10\%$$

$$f_3 = \frac{15}{50} = 0,30 \rightarrow f_3\% = 30\%$$

$$f_4 = \frac{14}{50} = 0,28 \rightarrow f_4\% = 28\%$$

$$f_5 = \frac{9}{50} = 0,18 \rightarrow f_5\% = 18\%$$

b)

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
0	2	0,08	8
1	6	0,24	24
2	4	0,16	16
3	10	0,4	40
4	3	0,12	12
ΣΥΝΟΛΟ	25	1	100

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1$$

$$0,08 + 0,24 + 0,16 + f_4 + 0,12 = 1$$

$$f_4 + 0,6 = 1$$

$$f_4 = 0,4$$

$$f_i\% = 100 \cdot f_i$$

$$= 100 \cdot \frac{v_i}{v}$$

$$= 100 \cdot \frac{v_i}{25}$$

$$= 4 \cdot v_i$$

4) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
x_1	2	0,04	4
x_2	18	0,36	36
x_3	12	0,24	24
x_4	10	0,2	20
x_5	8	0,16	16
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	100

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_4}{f_4} = \frac{10}{0,2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$v = 50$$

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Rightarrow v_i = f_i \cdot v = 0,04 \cdot 50 = 2$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{18}{50} = \frac{36}{100} = 0,36$$

$$v_5 = f_5 \cdot v = 0,16 \cdot 50 = 8$$

$$1 - 0,76 = 0,24$$

5 Να συμπληρώσεις τους παρακάτω πίνακες

(α)

x_i	v_i	N_i
3	2	2
4	5	7
5	6	13
7	4	17
8	3	20
ΣΥΜΜΟΛΟ	20	

$$N_1 = v_1 = 2$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 2 + 5 = 7$$

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 5 + 6 = 13$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 13 + 4 = 17$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 17 + 3 = 20$$

(β)

x_i	f_i	F_i
-1	0,05	0,05
0	0,1	0,15
1	0,15	0,3
2	0,4	0,7
3	0,3	1
ΣΥΜΜΟΛΟ	1	

$$F_1 = f_1 = 0,05$$

$$F_2 = F_1 + f_2 \Rightarrow f_2 = F_2 - F_1 = 0,15 - 0,05 = 0,1$$

$$f_3 = F_3 - F_2 = 0,3 - 0,15 = 0,15$$

$$f_4 = F_4 - F_3 = 0,7 - 0,3 = 0,4$$

$$f_5 = F_5 - F_4 = 1 - 0,7 = 0,3$$

6 Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα μιας μεταβλητής X

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	5	0,1	10	5	10
1	10	0,2	20	15	30
2	15	0,3	30	30	60
3	15	0,3	30	45	90
4	5	0,1	10	50	100
ΣΥΜΜΟΛΟ	50	1	100		

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Rightarrow 0,1 = \frac{5}{v} \Rightarrow v = \frac{5}{0,1} = 50 \Rightarrow v = 50$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow 0,2 = \frac{v_2}{50} \Rightarrow v_2 = 0,2 \cdot 50 = 10$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow 0,3 = \frac{v_3}{50} \Rightarrow v_3 = 0,3 \cdot 50 = 15$$

7 Να συμπληρώσει τον παρακάτω ελλιπή πίνακα μιας μεταβλητής X

X_i	V_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
-1	18	18	0,15	0,15	15	15
0	30	48	0,25	0,40	25	40
2	36	84	0,3	0,70	30	70
5	24	108	0,2	0,9	20	90
6	12	120	0,1	1	10	100
ΣΥΝΟΛΟ	120		1		100	

$$f_5 = \frac{V_5}{V} \Rightarrow 0,1 = \frac{12}{V} \Rightarrow V = \frac{12}{0,1} = \frac{120}{1} = 120 \quad \boxed{V=120}$$

$$f_3 = \frac{V_3}{V} \Rightarrow 0,3 = \frac{V_3}{120} \Rightarrow V_3 = 0,3 \cdot 120 = 36$$

$$\begin{aligned} V_4 &= V - V_1 - V_2 - V_3 - V_5 \\ &= 120 - 18 - 30 - 36 - 12 \\ &= 120 - 96 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$f_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{18}{120} = 0,15$$

$$f_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$f_4 = \frac{V_4}{V} = \frac{24}{120} = \frac{2}{10} = 0,2$$

8) Η βαθμολογία 20 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος φαίνεται στο διπλανό (επιτη) πίνακα.

	x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
v_1	3	2	2	10	10
v_2	4	4	6	20	30
v_3	5	8	14	40	70
v_4	6	5	19	25	95
v_5	8	1	20	5	100
	ΣΥΝΟΛΟ	20		100	

- (α) Να συμπληρωθεί τον πίνακα
 (β) Να βρεις πόσοι φοιτητές πήραν
 (i) κάτω από 6
 (ii) τουλάχιστον 4
 (iii) από 4 μέχρι και 6
 (γ) Να βρεις το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βαθμό
 (i) πάνω από 5
 (ii) το πολύ 5

α) $N=20$

$$f_1 = \frac{v_1}{N} \Rightarrow 0,1 = \frac{v_1}{20} \Rightarrow v_1 = 0,1 \cdot 20 = 2$$

$$f_2 = \frac{v_2}{N} \Rightarrow f_2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2 \Rightarrow f_2\% = 20\%$$

$$f_3 = \frac{v_3}{N} \Rightarrow 0,4 = \frac{v_3}{20} \Rightarrow v_3 = 0,4 \cdot 20 = 8$$

$$f_4 = \frac{v_4}{N} = 0,25 = \frac{v_4}{20} \Rightarrow v_4 = 0,25 \cdot 20 = 5$$

(β) Οι φοιτητές που πήραν

- (i) κάτω από 6 : $v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 4 + 8 = 14$
 (ii) τουλάχιστον 4 : $v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 4 + 8 + 5 + 1 = 18$
 (iii) από 4 μέχρι και 6 : $v_2 + v_3 + v_4 = 4 + 8 + 5 = 17$

(γ) Το ποσοστό των φοιτητών που πήραν βαθμό

- (i) πάνω από 5 : $f_4\% + f_5\% = 25\% + 5\% = 30\%$
 (ii) το πολύ 5 : $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 10\% + 20\% + 40\% = 70\%$

Β Εύρεση συχνοτήτων από ζώπο

9 Έστω x_1, x_2, x_3 , ($x_1 < x_2 < x_3$) οι ρίζες μιας μεμβλητικής X , ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους v .

(α) Αν $v_i = i^2 + 2i$, $i=1, 2, 3$ να βρούμε το v

(β) Αν $f_i = \frac{1}{i^2-1}$, $i=2, 3$, να βρούμε την f_1 .

(α) $v = v_1 + v_2 + v_3$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (1)^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \\ v_2 &= (2)^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8 \\ v_3 &= 3^2 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3 \\ v &= 3 + 8 + 15 \\ \boxed{v} &= \boxed{26} \end{aligned}$$

(β) $f_1 + f_2 + f_3 = 1$

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \\ f_3 &= \frac{1}{3^2-1} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f_1 &= 1 - f_2 - f_3 \\ f_1 &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \\ f_1 &= \frac{24}{24} - \frac{8}{24} - \frac{3}{24} \\ \boxed{f_1} &= \boxed{\frac{13}{24}} \end{aligned}$$

10 Έστω x_1, x_2, x_3 , ($x_1 < x_2 < x_3$) οι ρίζες μιας μεμβλητικής X , ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους v .

(α) Αν η F_3 είναι πριζα της εξίσωσης $x^2 + kx - 5 = 0$, να βρούμε το k .

(β) Αν $F_i = \frac{8i+1}{\lambda}$, για $i=1, 2, 3$, όπου λ θετικός ακέραιος, να αποδείξει ότι $\lambda=25$

(γ) Αν $N_i = 5i^2 + 11i$, για $i=1, 2, 3$, όπου μ θετικός ακέραιος και το μέγεθος του δείγματος είναι $v=100$, να βρούμε το μ και την v_1 .

(α) $F_3 = 1 \rightsquigarrow f(1) = p$

$$\begin{aligned} 1^2 + k \cdot 1 - 5 &= 0 \\ 1 + k - 5 &= 0 \\ k &= 5 - 1 \\ \boxed{k} &= \boxed{4} \end{aligned}$$

$$(8) F_3 = 1 \Rightarrow \frac{8 \cdot 3 + 1}{9} = 1$$

$$\Rightarrow 24 + 1 = 9$$

$$\Rightarrow 9 = 25$$

$$(8) N_3 = v = 100$$

$$N_i = 5i^2 + 11\mu$$

$$i=3 \quad N_3 = 5 \cdot (3)^2 + 11\mu$$

$$100 = 5 \cdot 9 + 11\mu$$

$$100 = 45 + 11\mu$$

$$100 - 45 = 11\mu$$

$$\frac{55}{11} = \frac{11\mu}{11}$$

$$\mu = 5$$

$$V_1 = N_1 = 5 \cdot 1^2 + 11 \cdot 5$$

$$= 5 + 55$$

$$= 60$$

$$V_1 = 60$$