18/04/2019

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

• Έστω το πρόβλημα 2 σημείων με σ.σ. Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x)+q(x)u(x)=f(x) \quad , x\in[a,b] \quad (1) \\ u(a)=u(b)=0 \quad , a,b\in\mathbb{R} \quad , a<b \quad , q,f\in C[a,b] \quad , q>0 \end{cases}$$

Εργαλεία

1. $C_0^k[a,b]=\{v\in C^k[a,b] : v(a)=v(b)=0\}$
2. Θεωρούμε υπόχωρο V του $C_0[a,b]$
 $V=\{v\in C[\alpha,b] : v$ κάτω τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη$\}$
3. Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $(v,w)=\int_a^b v(x)w(x)dx$,
 $v,w\in C[\alpha,b]$ με $\|v\|=(v,v)^{1/2}=\left(\int_a^b v^2(x)dx\right)^{1/2}$

$(v,w)=(w,v)$
$(v,w+z)=(v,w)+(v,z)$
$(v,\lambda w)=\lambda(v,w) \quad , \lambda\in\mathbb{R}$

4. Ανισότητα Cauchy-Shwartz : $|(v,w)|\leq \|v\|\cdot\|w\|$
 $v,w\in C[\alpha,b]$, δηλ. $\left(\int vw\right)^2\leq\int v^2\int w^2$
5. Ανισότητα Poincaré-Friedrichs

Έστω $v\in C_0^1[\alpha,b]$. Έχουμε $\|v\|\leq(b-a)\|v'\|$

Αποδ 5) Έχουμε $v(a)=0$, άρα $v(x)=\int_a^x v'(s)ds$, $x\in(a,b)$

$|v(x)|^2=\left(\int_a^x v'(s)ds\right)^2 \overset{(4)}{\leq} \int_a^x 1^2ds\int_a^x(v'(s))^2ds$. Άρα $|v(x)|^2\leq(b-a)\|v'\|^2$

ολοκληρώνω τη σχέση κατά μέλη $\int_a^b|v(x)|^2\leq\int(b-a)\|v'\|^2 \Rightarrow \|v\|^2\leq(b-a)^2\|v'\|^2$

6. Αν $v\in C_0^2[a,b]$ η λύση του (1), τότε $\exists$ σταθερά c ανεξάρτητη των a,b,q τ.ω.
 $\|v\|+\|v'\|+\|v''\|\leq c\|f\|$ (ανισότητα ελλειπτικώς ομαλότητας)

• Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο των 2 μελών της (1) με μία συνάρτηση $v \in C_0^1[a,b]$

↳ κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη

$$-(u'',v) + (qu,v) = (f,v)$$

ολοκληρώνω κατά μέλη $\int_a^b u''v = \underbrace{u'v\Big|_a^b}_{0} - \int u'v'$

0 γιατί $v \in C_0^1[\alpha,b]$ δηλ. $v(a)=v(b)=0$

Θα έχουμε

$(u',v') + (qu,v) = (f,v)$, $\forall v \in C_0^1[\alpha,b]$ (ένας άλλος χαρακτηρισμός της λύσης)

Επομένως, έχουμε $(u',v') + (qu,v) = (f,v)$ $\forall v \in V$ (2)

(ασθενής ή μεταβολική μορφή του προβλήματος)

{ Αντί να λύσω το πρόβλημα (1) θα λύνω το (2)

Η <u>v λέγεται συνάρτηση δοκιμής</u> και μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν u είναι η λύση του (2), τότε η u καλείται <u>ασθενής λύση</u> του (1).

Η (2) μας οδηγεί στις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων ή μέθοδος Galerkin.

<u>Μέθοδος Galerkin</u>

Θεωρούμε διαμέριση του $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$ ($N+2$ σημεία)

Θεωρούμε $V_n = \{x \in C[a,b] : x(a) = x(b) = 0 \,,\, x|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1\}$

ο χώρος πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1.

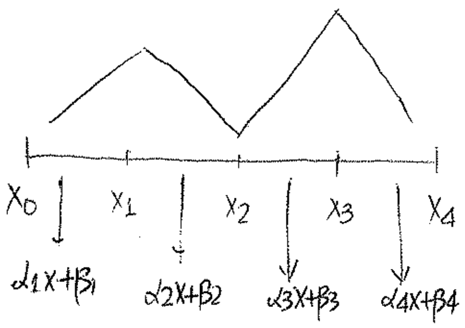
$$h = \max_j (x_{j+1} - x_j)$$

Αναζητούμε λύσεις του προβλήματος σε χώρο πεπερασμένης διάστασης:

$\dim V_n = N$

<u>Παραδείγματα:</u>

Έστω $N=3 \sim 5$ σημεία



← τυχαία η κάθε ευθεία

← επειδή είναι βαθμού το πολύ 1.

Έχω 8 άγνωστους λοιπόν

$$a_1 x_0 + \beta_1 = 0$$
$$a_4 x_4 + \beta_4 = 0$$

για τα άκρα

$$a_1 x_1 + \beta_1 = a_2 x_1 + \beta_2$$
$$a_2 x_2 + \beta_2 = a_3 x_2 + \beta_3$$
$$a_3 x_3 + \beta_3 = a_4 x_3 + \beta_4$$

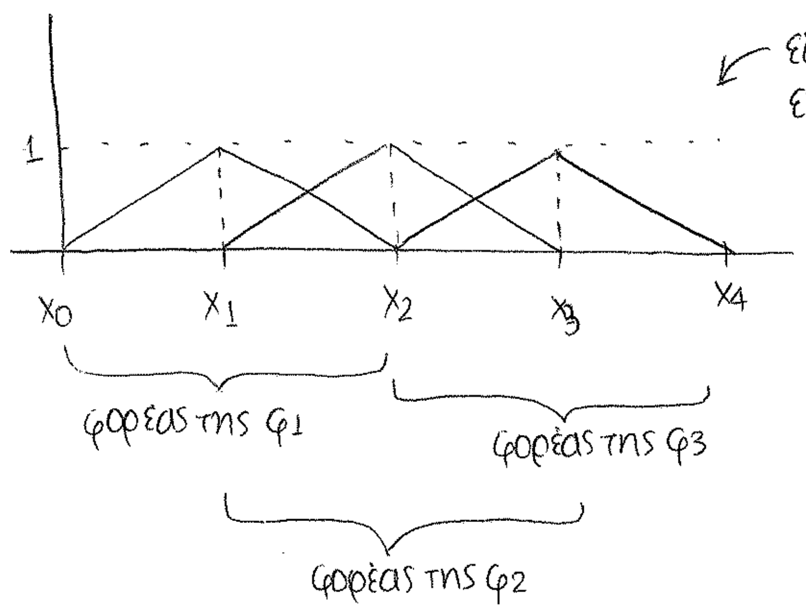
επειδή είναι συνεχής

Έχω 8 αγνώστους με 5 συνθήκες. Άρα 3 βαθμούς ελευθερίας.

Η διάστασή του χώρου είναι 3 (δηλ. N)

▸ Βρίσκουμε μία βάση για το χώρο V_h:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j-1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad , j=1,\dots,N$$



εδώ μας ενδιαφέρει τι γίνεται και ενδιάμεσα όχι όπως στη διακριτοποίηση

$\varphi_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ ← ευθεία ← συντελεστής και $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$

__Λήμμα:__ Οι συναρτήσεις $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ αποτελούν βάση του χώρου V_h

(I) $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ γραμμικά ανεξάρτητες

Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό των φ_j: $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i(x) = 0$, $x \in [\alpha, b]$

Θεωρούμε όταν x το x_j

παίρνω π.χ ένα $N=3$ και έχω:

$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \lambda_3 \varphi_3(x) = 0$

• για $x = x_1$: $\lambda_1 \underbrace{\varphi_1(x_1)}_{1} + \lambda_2 \underbrace{\cancel{\varphi_2(x_1)}}_{0} + \lambda_3 \underbrace{\cancel{\varphi_3(x_1)}}_{0} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \varphi(x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

• για $x = x_2$: ... $\Rightarrow \lambda_2 \varphi_2(x_2) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

• για $x = x_3$: ... $\Rightarrow \lambda_3 \varphi_3(x_3) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

Οι $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ παράγουν το χώρο V_h: Έστω $v \in V_h$, τότε $V(x) = \sum_{j=1}^{N} v(x_j) \varphi_j(x)$, $x \in [\alpha, b]$

γραμ. πολυώνυμο α καθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

και έστω x το x_i : $v(x_i) \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{=1} = v(x_i)$

Π.χ: Για $N=2$, $u(x_1)\varphi_1(x) + u(x_2)\varphi_2(x)$

• Για $x = x_1$ έχω:

$u(x_1) \overbrace{\varphi_1(x_1)}^{1} + u(x_2) \overbrace{\cancel{\varphi_2(x_1)}}^{0} = u(x_1)$

Για $x = x_2$ ...