Ασκήσεις κεφαλαίου 2

1. Δίνεται το σύνολο X={a, b, c, d, e}. Να εξετάσετε αν τα σύνολα

$\tau_{1=}$$\{\emptyset, \mathrm{X}$, {a}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d, e}}

και

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{c, d}\}, \{\mathrm{a, c, d}\}, \{\mathrm{b, c, d}\}\}$$

είναι τοπολογίες επί του συνόλου X.

<u>Λύση</u>

Για το πρώτο σύνολο ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:

1) Το ∅ και το X ανήκουν στο τ_1
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ_1 ανήκει στο τ_1
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ_1 $ανήκει\ στο$ τ_1

Επομένως, το τ_1 είναι τοπολογία επί του X.

Για το δεύτερο σύνολο δεν ισχύουν όλα τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:
1) Το $\emptyset\ και\ το\ \mathrm{X}\ ανήκουν\ στο\ \tau_2$
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ_2 $ανήκει\ στο\ \tau_2$
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ_2 δεν ανήκει στο $\tau_2(\{\mathrm{a}\} \cup \{\mathrm{b, c, d}\} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ $δεν\ ανήκει\ στο\ \tau_2)$

Επομένως, το τ_2 $είναι\ τοπολογία\ επί\ του\ X$.

2. Έστω X={a,b,c,d} και τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{b, c}\}, \{\mathrm{a, b, c}\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθούν τα σύνολα Cl({b, d}) ,Cl({a, c}) και Int({b, c, d}).
<u>Λύση</u>
Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας δηλαδή:
1) Το ∅ και το X ανήκουν στο τ
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ

Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X.
Θα βρούμε το συμπλήρωμα του συνόλου που είναι το $\tau^{\text{‘}} = \{\emptyset, X, \{\mathrm{a, c, d}\}, \{\mathrm{a, d}\}, \{\mathrm{d}\}\}$.

Άρα το:
- Cl({b, d})=X
- Cl({a, c})={a, c, d}
- Int({b, c, d})={b, c}

3. Έστω X={1, 2, 3, 4} και τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{1\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}\}$. Να αποδειχθεί ότι η τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθεί η σχετική τοπολογία τ_A επί του συνόλου A={2, 3}.

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

1) Το ∅ και το X ανήκει στο τ
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ

Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X.

Η σχετική τοπολογία δίνεται από αυτή τη σχέση $\tau_A = \{\mathrm{U} \cap \mathrm{A}\colon \tau \in \mathrm{U}\}$, δηλαδή η τοπολογία έχει τη μορφή $\tau_A = \{\emptyset, A, \{2,3\}, \{3\}\}$.

5. Έστω X={1, 2, 3} και τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και βρεθούν τα σύνολα Cl({1, 3}), Int({3}) και Cl({1, 2}).

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

1) Το ∅ και το X ανήκει στο τ
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ

Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X.

Το συμπληρωματικό σύνολο του τ είναι το τ`=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3\}\}$. Άρα το:

- Cl({1, 3})={1, 3}
- Cl({1, 2})=X
- Int({3})=∅.

6. Έστω X={1,2,3,4,5} και τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{1{,}3{,}4\}, \{4\}, \{1{,}3\}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τ είναι τοπολογία επί του X και να βρεθούν τα σύνολα Cl({2,3}) , Int({1,2,4}) και Bd({3,4,5}).

Λύση

Για το σύνολο τ ισχύουν τα αξιώματα της τοπολογίας:

1) Το ∅και το X ανήκει στο τ
2) Η τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ
3) Η ένωση οποιαδήποτε πλήθους στοιχείων του τ ανήκει στο τ

Επομένως, το τ είναι τοπολογία επί του X.

Το συμπληρωματικό σύνολο του τ είναι το τ‘=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{2,5\}, \{1,2,3,5\}, \{2,4,5\}\}$

Άρα το:

- Cl({2,3})={1, 2, 3, 5}
- Int({1, 2, 4})={4}
- Bd ({3, 4, 5})= Cl({3, 4, 5}) \ Int({3, 4, 5})=X\{4}={1, 2, 3, 5}.

Κεφάλαιο 2

10. Έστω A υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ισότητες:

(1) $Bd(A) \cap Int(A) = \emptyset$

(2) $Cl(A) = Int(A) \cup Bd(A)$

(3) $X = Int(A) \cup Bd(A) \cup Int(X \setminus A)$

Λύση

(1) $Bd(A) \cap Int(A) = Cl(A) \setminus Int(A) \cap Int(A) = \emptyset$

(2) $Int(A) \cup Cl(A) \setminus Int(A) = Cl(A)$

(3) $Int(A) \cup Bd(A) \cup Int(X \setminus A) = X$.

Άρα $Int(A) \cup Cl(A) \setminus Int(A) \cup Int(X \setminus A) = X$

15. Να αποδειχθεί ότι η τομή δύο τοπολογιών επί ενός συνόλου X είναι τοπολογία επί του X.

Λύση

Έστω ένα σύνολο $X = \{1, 2, 3\}$ με τοπολογία $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ και

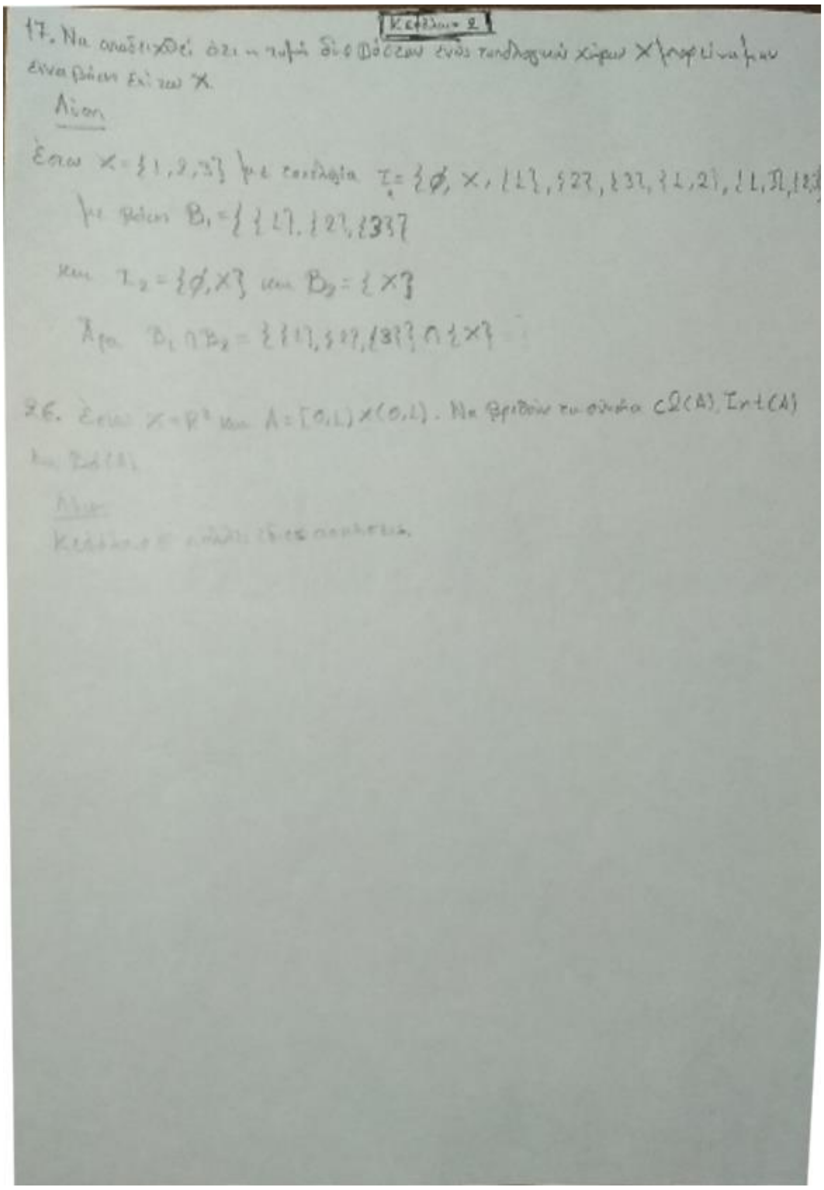
$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ είναι τοπολογία τις τ_1 και τ_2

Θα βρούμε την τομή $\tau' = \tau_1 \cap \tau_2 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ είναι τοπολογία επί του X Ο.Ε.Δ

16. Να αποδειχθεί ότι η ένωση δύο τοπολογιών επί ενός συνόλου X γενικά δεν ισχύει ότι είναι τοπολογία επί του X.

Λύση

Χρησιμοποιώ την ίδια με την 15. τοπολογία του συνόλου $X = \{1,2,3\}$.



Κεφάλαιο 2

17. Να αποδειχθεί ότι η τομή δύο βάσεων ενός τοπολογικού χώρου X [illegible] είναι βάση επί του X.

Λύση

Έστω $X=\{1,2,3\}$ με τοπολογία $\tau_1=\{\emptyset, X, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

με βάση $B_1=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

και $\tau_2=\{\emptyset,X\}$ και $B_2=\{X\}$

Άρα $B_1\cap B_2=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}\cap\{X\}$

26. Έστω $X=\mathbb{R}^2$ και $A=[0,1)\times(0,1)$. Να βρεθούν τα σύνολα $Cl(A)$, $Int(A)$ και $Bd(A)$.

Λύση

Κεφάλαιο [illegible]

Ασκήσεις κεφαλαίου 3

2. Δίνονται οι τοπολογικοί χώροι (X, τ) και (Y, σ), όπου Y=X={a, b, c}, τ=$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ και σ=$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση f: X→ Y με f(b)=a, f(a)=b και f(c)=c είναι συνεχής.

<u>Λύση</u>

α’ τρόπος

Έστω μία ανοικτή περιοχή U, εάν $U \in \sigma$ τότε $f^{-1}(U) \in \tau$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

- Αν U=∅ εσ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \ \in \tau$
- Αν U=X εσ τότε $f^{-1}(X) = X \ \in \tau$
- Αν U={a} εσ τότε $f^{-1}(\{a\}) = \{b\} \ \in \tau$
- Αν U={b} εσ τότε $f^{-1}(\{a,b\}) = \{a,b\} \ \in \tau$
- Αν U={a,b} εσ τότε $f^{-1}(\{a,c\}) = \{b,c\} \ \notin \ \tau$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο X.

β' τρόπος

Έστω F ένα κλειστό σύνολο του Y, εάν $F \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(F) \in \tau^{c}$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

Αρχικά θα βρούμε τα συμπληρωματικά σύνολα των τ και σ. Τα οποία είναι:

$$\sigma^{c} = \{\{b,c\},\{c\},\{b\},X,\emptyset\} \quad \text{και} \quad \tau^{c} = \{\emptyset, X, \{b,c\},\{a,c\},\{c\}\}$$

Άρα:

- Αν $F=\emptyset \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau^{c}$
- Αν $F=X \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(X)=X \in \tau^{c}$
- Αν $F=\{b,c\} \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(\{b,c\}) = \{a,c\} \in \ \tau^{c}$
- Αν $F=\{c\} \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \in \tau^{c}$
- Αν $F=\{b\} \in \sigma^{c}$ τότε $f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \notin \ \tau^{c}$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο X.

4.Έστω X={0,1} και τ={X,{0},∅}. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση f: (X,τ)→ (X, τ) με f(0)=1 και f(1)=0 είναι συνεχής.

<u>Λύση</u>

α' τρόπος

Θα το αποδείξουμε με τη βοήθεια του ορισμού, άρα:

- Για το $x_0 = 0 \ το \ f(x_0) = f(0) = 1$. Τότε για κάθε ανοικτή $U_{f(0)} = U_1 του \ f(0)$ στο χώρο X δηλαδή $U_1 = X$. Υπάρχει μία ανοικτή περιοχή V_0δηλαδή το {0} ή X στο χώρο X τ.ω $f(V_0) \subseteq U_1$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.
- Για το $x_0 = 1$ το $f(x_0) = f(1) = 0$. Τότε για κάθε ανοικτή περιοχή U_0 του f(1) στο χώρο X δηλαδή $U_0 = \{0\}$ ή X. Το $V_1 = X$. Επομένως το $f(V_1) \nsubseteq U_0$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο X.

β'τρόπος

Έστω μία ανοικτή περιοχή U, εάν $U \in \tau$ τότε το $f^{-1}(U) \in \tau$. Στο δικό μας παράδειγμα έχουμε:

- Αν $U=\emptyset \in \tau$ τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
- Αν $U=X \in \tau$ τότε $f^{-1}(X) = X \in \tau$
- Αν $U=\{0\} \in \tau$ τότε $f^{-1}(\{0\}) = \{1\} \notin \tau$.

Επομένως, η f δεν είναι συνεχής στο X.

3.Έστω (X={a,b,c}, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$) και (Y ={a,b,c} ,$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\},\{b\},\{a,b\}\}$) τοπολογίες επί του X. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση f: $(X,\tau_1) \rightarrow (Y,\tau_2)$ με $f(a) = a$, $f(b) = a$ και $f(c) = c$ είναι συνεχής.

Λύση

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα θεωρώ μία ανοικτή περιοχή U που να ανήκει στην τοπολογία του Y. Για το παράδειγμα μας ισχύουν τα εξής:

- Αν U=∅ ∈ τ_2 τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$
- Αν U=X ∈ τ_2 τότε $f^{-1}(X) = X \in \tau_2$
- Αν U={a}∈ τ_2 τότε $f^{-1}(\{a\}) = \{a, b\} \in \tau_1$
- Αν U={b}∈ τ_2 τότε $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \in \tau_1$
- Αν U={a,b}∈ τ_2 τότε $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\} \in \tau_1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο X.

17. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά δεν είναι ανοικτή.
Λύση
Θεωρώ την συνάρτηση f: **R**→ **R με f**(x)=1 ∀x ∈ R. Τότε f[A]={1} για όλα τα A⊂R. Επομένως η f μία συνεχής απεικόνιση , κλειστή αλλά όχι ανοικτή.

20. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης που είναι κλειστή αλλά δε είναι ανοικτή.
Λύση
Θεωρώ την απεικόνιση f**:R**→**R** με f(x)=χ^2, έστω A=(-1, 1) ανοικτό σύνολο. Το f[A]=[0, 1) δεν είναι ανοικτή. Άρα η συνάρτηση μας δεν ανοικτή.

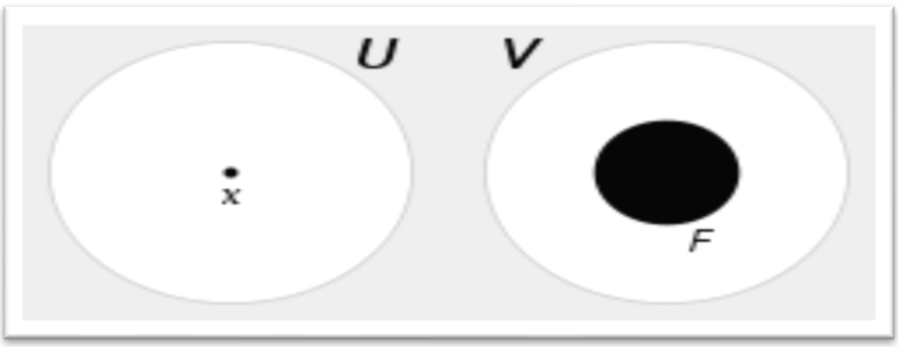
Ασκήσεις κεφαλαίου 4

2.Δίνεται ο τοπολογικός χώρος (X, τ), όπου και X={a, b, c, d} και τ={X, {a}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c}, ∅}. Να εξεταστεί αν ο (X, τ) είναι $T_1 - \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma$.
Λύση
Ένας τοπολογικός χώρος είναι $T_1 -$ χώρος εάν και μόνο εάν ∀χ ∈ X το μονοσύνολο {χ} είναι κλειστό. Σε εμάς υπάρχουν μονοσύνολα που δεν είναι κλειστά. Π. χ το $\{a\}^c$={b, c, d} ∉τ άρα ο τοπολογικός μας χώρος δεν είναι $T_1 -$ χώρος.

3.Έστω X={a, b, c} και τ={{a}, {b,c}, X, ∅} τοπολογία επί του X. Να εξετασθεί αν ο χώρος (X, τ) είναι κανονικός χώρος.

Λύση

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος κανονικός θα πρέπει να είναι T_1 και T_3χώρος. Ο χώρος μας δεν είναι Fréchet δίοτι υπάρχουν μονοσύνολα που δεν είναι κλειστά. Άρα ο χώρος μας δεν είναι κανονικός (regural space) δίοτι δεν είναι Fréchet. Αλλά είναι $T_3 - \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma$, Όπως βλέπουμε και στο παρακάτω σχήμα:



- ✓ Για το χ=a∈ X υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U={a} τέτοιο ώστε το a∈ $U = \{a\}$ και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το {b, c}∈ τ' *όπου το* $a \notin \{b, c\}$ και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V={b ,c} όπου F⊆V και ισχύει ότι U∩ $V = \emptyset$.
- ✓ Για το χ=b∈ X υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U={b,c} τέτοιο ώστε το b∈ U={b,c} και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το {a} ∈ τ' όπου το b∉ {a} και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V={a} όπου F⊆V και ισχύει ότι U∩ $V = \emptyset$.
- ✓ Για το χ=c∈ X υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U={b, c} τέτοιο ώστε c∈ $U = \{b, c\}$ το και ένα κλειστό υποσύνολο F του X που είναι το {a}∈ τ' όπου το c∉{a} και υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V={a} όπου F⊆V και ισχύει ότι U∩V=∅.

Όπου το τ^{c}={X, {b, c}, {a}, ∅}

Επομένως, ο χώρος είναι $T_3 -$ χώρος.

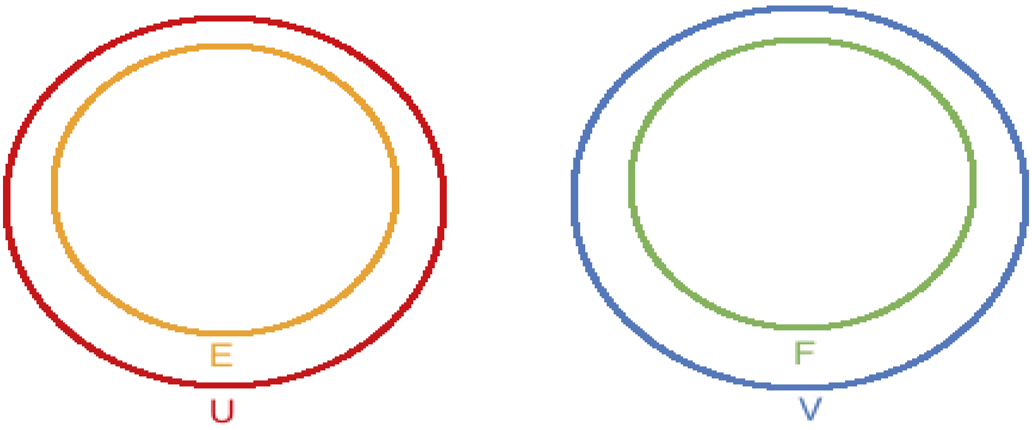
Αλλά όπως είπαμε και παραπάνω ο χώρος με την συγκεκριμένη τοπολογία δεν είναι κανονικός χώρος.

4.Έστω X={a, b, c} και τ={X, {a}, {b}, {a,b}, ∅} τοπολογία επί του X. Να εξεταστεί αν ο (X, τ) είναι φυσικός χώρος.

<u>Λύση</u>

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος φυσικός (normal) θα πρέπει να είναι T_1 και T_4 χώρος ταυτόχρονα. Όπως μπορούμε να δούμε ο χώρος μας με την συγκεκριμένη τοπολογία δεν είναι φυσικός αφού δεν είναι T_1 και με βάση την άσκηση **2** που λύσαμε παραπάνω .

Αλλά ας εξετάσουμε εάν είναι T_4. Βλέποντας την παρακάτω εικόνα μπορούμε να καταλάβουμε.



Για κάθε **E, F** είναι κλειστά υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, του X με E∩ $F = \emptyset$. Και υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U, V του X με E⊆U και F⊆V και ισχύει ότι $U \cap V = \emptyset$.

Με $\tau^{c}=\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$, άρα μπορούμε να βρούμε κλειστά υποσύνολα τα οποία είναι το $\emptyset, X$ και ανοικτά $\emptyset, X$ που να τα περιέχουν και να είναι ξένα μεταξύ τους. Ως εκ' τούτου ο χώρος (X, τ) είναι $T_4 -$ χώρος.

8.Έστω f,g: X→ Y συνεχείς απεικονίσεις από ένα τοπολογικός χώρο X σε ένα Hausdorff χώρο Y. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A = {χ∈ X: $f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

<u>Λύση</u>

Έστω Α={x|f(x)=g(x)}. Εάν (x_λ) είναι μία ακολουθία στο Α και $x_\lambda \to$ x, τότε μέσω των συνεχών συναρτήσεων έχουμε f(x_λ) $\to f(x)$ και g(x_λ) $\to$ g(x) στο Υ. Το f(x_λ) $=$ g(x_λ) για όλα τα λ και το όριο είναι μοναδικό μέσα στο Υ, έχουμε f(x)=g(x). Άρα το x∈ A και το Α είναι κλειστό.

Ασκήσεις κεφαλαίου 5

1.Δίνεται ο τοπολογικός χώρος (Χ, τ) με Χ={α, β, γ} και τ={Χ, {α}, {β, γ}, ∅} και τοπολογικό χώρο Υ={κ, λ} με **τ** ={Υ, {κ}, ∅}. Να βρεθεί μία βάση της τοπολογίας γινομένου επί του Χ × Υ.

Λύση

Το γινόμενο Χ × Υ = { (α, κ), (α, λ), (β, κ), (β, λ), (γ, κ), (γ, λ) }

- $\pi_X{}^{-1}(\emptyset) = \pi_Y{}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $\pi_\chi{}^{-1}(X) = \pi_Y{}^{-1}(Y) = X \times Y$
- $\pi_X{}^{-1}(\{\alpha\}) = \{(\alpha,\kappa),(\alpha,\lambda)\}$
- $\pi^{-1}{}_X(\{\beta,\gamma\}) = \{(\beta,\kappa),(\beta,\lambda),(\gamma,\lambda),(\gamma,\kappa)\}$
- $\pi^{-1}{}_Y$({κ})={(α, κ), (β, κ), (γ, κ)}

Άρα η βάση της τοπολογίας μας είναι Β={∅, Χ × Υ, {(α, κ), (α, λ)}, { (β, κ), (β, λ), (γ, λ), (γ, κ)}, {(α, κ) ,(β, κ) ,(γ, κ)}, {(α, κ)}, {(β, κ),(γ, κ)}}.

1. Έστω (X, τ_1) $και\ (Y,\tau_2)\ τοπολογικοί\ χώροι,\ όπου\ X = \{1,2,3\}, Y = \{1,2\}, \tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}\ και\ \tau_2 = \{\emptyset, Y, \{1\}\}$. Να βρεθεί μία βάση της τοπολογίας γινομένου επί του Χ × Υ.

Λύση

Έχουμε το σύνολο Χ × Υ=
{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

- $\pi^{-1}{}_\chi(X) = \pi^{-1}{}_Y(Y) = X \times Y$
- $\pi^{-1}{}_X(\emptyset) = \pi^{-1}{}_Y(\emptyset) = \emptyset$
- $\pi^{-1}{}_X(1) = \{(1,1),(1,2)\}$
- $\pi^{-1}{}_X(\{2,3\}) = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
- $\pi^{-1}{}_Y(\{1\}) = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$

H βάση της τοπολογίας γινομένου είναι: $B = \{\emptyset,\ X \times Y$, {(1, 1), (1, 2)}, {(1,1)}, {(2, 1), (3,1)}, {(1, 1), (2, 1), (3,1)}, {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}}. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση.

3 & 4 . Είναι ίδιες με τις δύο προηγούμενες

5.Έστω (Χ, τ) τοπολογικός χώρος Χ={1,2} και τ={∅, X, {1}}. Να βρεθεί βάση της τοπολογίας γινομένου επί του Χ× R.

Λύση

Θεωρώ μία βάση του R το {2} και κάνω ότι ακριβώς έκανα και στην προηγούμενη άσκηση.

7.Να αποδειχθεί ότι η τοπολογία του χώρου γινομένου $\mathrm{R} \times \ldots \times \mathrm{R}$ (n–φορές) συμπίπτει με την τοπολογία του Ευκλείδιου χώρου R^n .

Λύση

Έστω R με την Εκλείδεια τοπολογία που είναι ένα ανοικτό διάστημα. Έστω ένα ανοικτό σύνολο στην τοπολογία γινομένου του R^n είναι ένωση των ανοικτών διαστημάτων. Αφού το γινόμενο είναι ένα ανοικτό σύνολο που είναι ένα ανοικτό ορθογώνιο και ένα ανοικτό ορθογώνιο είναι μία ένωση ανοικτών σφαιρών άρα ως εκ΄ τούτου η τοπολογία γινομένου R^{n} είναι ακριβώς η Ευκλείδια τοπολογία.

9.Έστω A=(0, 1) και B=(0, 1). Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο $R \times R$ τα σύνολα Int(A$\times$ B), $\mathrm{Cl}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ και $\mathrm{Bd}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$.

Λύση

Int(A)=Int(B)=(0, 1)

Cl(A)=Cl(B)=[0, 1]

Άρα, Cl(A$\times$ B) $= \mathrm{Cl}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Cl}(\mathrm{B}) = [0,1] \times [0,1]$

Int(A$\times$ B) $= \mathrm{Int}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Int}(\mathrm{B}) = (0,1) \times (0,1)$

Bd(A$\times$ B) $= (\mathrm{Cl}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Bd}(\mathrm{B})) \cup (\mathrm{Bd}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Cl}(\mathrm{B})) = ([0,1] \times (0,1)) \cup ((0,1) \times [0,1])$

28.Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο φυσικών χώρων μπορεί να μην είναι φυσικός.

Λύση

Έστω δύο φυσικοί τοπολογικοί χώροι X={α,β} και Y={γ,δ} με τις τοπολογίες $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{\alpha\}, \{\beta\}\}\ \kappa\alpha\iota\ \tau_2 = \{\emptyset, \Upsilon, \{\gamma\}, \{\delta\}\}$ αντίστοιχα. Αρκεί να κάνουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{X} \times \Upsilon$ και θα δείξουμε ότι δεν είναι φυσικοί χώροι. Αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Ασκήσεις κεφαλαίου 6

1.Να αποδειχθεί ότι ο υπόχωρος Q των ρητών αριθμών του R δεν είναι τοπικά συμπαγής**.**

Λύση

Ανάμεσα σε κάθε ρητό υπάρχει ένας άρρητος με τον όρισμό της τοπικής συμπάγιας δεν υπάρχει συμπαγείς περιοχής. Ως εκ΄τούτου δεν είναι τοπικά συμπαγής**.**

2.Να αποδειχθεί ότι ο Ευκλείδιος χώρος $R^{\mathrm{n}}, n = 2, 3, \ldots$, είναι τοπικά συμπαγής.

Λύση

‘Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη διαφορική γεωμετρία μία n-διάστατη πολλαπλότητα είναι Hausdorff χώρος. Ξέρουμε ότι με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος ότι ένας Hausdorff χώρος X είναι τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν κάθε σημείο του Χ έχει συμπαγή περιοχή. Άρα το R^nμε n=2,3,4, … είναι τοπικά συμπαγής.

3.Να αποδειχθεί ότι ο χώρος γινόμενο $\prod\{X_i : i \in I\}$ είναι τοπικά συμπαγής εάν και μόνον εάν όλοι οι χώροι $X_i, i \in I$, είναι τοπικά συμπαγείς και το πολύ πεπερασμένο πλήθος από αυτούς δεν είναι συμπαγείς.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η ισχύει. Δίνεται $\{x_{\mathrm{i}}\} \in \prod_i X_i$ για κάθε το πολύ πεπερασμένα X_i αλλά δεν είναι συμπαγή, διαλέγω μια σχετικά συμπαγή περιοχή $\mathrm{V}_{i_k}(x_{i_k})$ τότε το $\langle \mathrm{V}_{i_1}, \dots, V_{i_n} \rangle$ είναι μία περιοχή του $\{\mathrm{x_i}\}$ και η κλειστή θήκη του $\langle \mathrm{V}_{i_1}, \dots, V_{i_n} \rangle$ είναι ίσο με τις επιμέρους κλειστές θήκες όπου είναι συμπαγείς.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\prod_{\mathrm{i}} X_i$ είναι τοπικά συνεκτικό. Το π_{i} είναι μία συνεχή ανοικτή προβολή για κάθε X_{i} είναι τοπικά συμπαγές. Αλλά διαλέγουμε οποιαδήποτε ανοικτό συμπαγές V$\subset \prod_i X_i$ για κάθε συμπαγές $\pi_{\mathrm{i}}(Cl(v))$ και το $\pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{Cl(V)}) = X_i$ το οποίο θέλαμε να δείξουμε.

4.Να αποδειχθεί ότι κάθε τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος είναι Tychonoff**.**

Λύση

Έστω (X, τ) είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος και ο (Y, σ) είναι συμπαγοποίηση Alexandroff του (X, τ). Αφού ο (Y, σ) είναι συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε η σ είναι normal τοπολογία. Από το λήμμα του Urysohn ο (Y,σ) είναι Tychonoff (T_1 $και$ $T_{3\frac{1}{2}} - χώροι$). Τότε ο (X, τ) υπόχωρος ενός Tychonoff χώρος είναι completely regular space.

5.Να βρεθεί ανοικτή κάλυψη του (0, 1) η οποία είναι δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Λύση

Το Q= $\{(\frac{1}{n},1) | \text{n=2,…,}\infty\}$ και Q= $\{(0,\frac{1}{2}), (0,\frac{2}{3}), (0,\frac{3}{4}), \dots\}$ αυτές είναι οι δύο ανοικτές καλύψεις. Αλλά και το $G_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ με $\mathrm{n} = 1, 2, 3, \dots$.

12. Έστω X=(0, 1) ο υπόχωρος του Ευκλειδίου χώρου R. Να κατασκευασθούν δύο συμπαγοποιήσεις του X που δεν είναι ομοιόμορφες.

Λύση

Για να το δείξω αυτό θα χρησιμοποιήσω το παρακάτω θεώρημα. Εάν έχω μία f συνεχή και ένα προς ένα συνάρτηση από το X που είναι συμπαγές και το Y που είναι Hausdorff. Τότε το X είναι ομοιόμορφο με το f(X).

1. Το X=(0, 1) με το f(t)=(cos2πt, sin2πt)
2. Το X=(0, 1) με το R^{n}.

25. Να δοθεί παράδειγμα συμπαγούς υποσυνόλου ενός τοπολογικού χώρου X που δεν είναι κλειστό.

Λύση

Παίρνω το R και με βάση τα κλειστά διαστήματα.

Ασκήσεις κεφαλαίου 7

1.Να αποδειχθεί ότι κάθε κλειστός δίσκος του R^2 είναι συνεκτικό υποσύνολο τουR^2.

Λύση

Ας σκεφτούμε έναν κλειστό δίσκο (κύκλο) που έχει στη περιφέρεια του δίσκου δύο σημεία a και d τα οποία ενώνονται μεταξύ τους με έναν δρόμο. Το οποίο είναι συνεκτικό κατά δρόμο άρα είναι συνεκτικό.

2.Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του R^2. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $R^2\backslash A$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^2**.**

Λύση

Αφού το A είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του R^2, τότε ο χώρος $\mathrm{R}^2\backslash\mathrm{A}$ είναι συνεκτικός κατά δρόμο. Αλλά εάν a και b είναι δύο σημεία του $\mathrm{R}^2\backslash A$. Επομένως, το $\mathrm{R}^2\backslash\mathrm{A}$ περιέχει μη αριθμήσιμες ευθείες που διέρχονται από τα σημεία a και b και αν τα ενώσουμε μας δίνει ένα τόξο με άκρα το a και b. Το οποίο δείξαμε.

11.Έστω X={a, b, c}. Να δοθούν όλες οι τοπολογίες τ επί του X έτσι ώστε ο χώρος (X,τ) να είναι συνεκτικός.

Λύση

Για να είναι ένας τοπολογικός χώρος συνεκτικός θα πρέπει τα μοναδικά ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του X να είναι το $\emptyset$ και το X.

Οι τοπολογίες που έχουμε είναι:

- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{b\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{c\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{b , c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a, b\}, \{b , c\}, \{a\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$
- τ=$\{\emptyset, \mathrm{X}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c\}\}$

Για να δείξω ότι είναι συνεκτικός ο χώρος μου αρκεί να βρω την συμπληρωματική τοπολογία. Αλλά ένα παράδειγμα θα μας πείσει. Ας πάρω την τοπολογία τ=$\{\emptyset, X\,\{a\}\}$ και θα βρω την $\tau' = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ με $\tau \cap \tau' = \{\emptyset, X\}$. Άρα με βάση τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως για το συνεκτικό βλέπουμε στην πράξη να ισχύει.

8.Να δοθεί παράδειγμα χώρου που είναι συνεκτικός και δεν είναι συνεκτικός κατά δρόμο.

<u>Λύση</u>

Το παράδειγμα θα το δώσουμε μέσω της Κ-τοπολογίας(K-topology). Άρα ο τοπολογικός χώρος (R,τ) είναι συνεκτικός κατά δρόμο αλλά δεν είναι συνεκτικός κατά δρόμο και έχει δύο μονοπάτια-δρόμοι το $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$.

4.Να αποδειχθεί ότι αν X, Y τοπικά συνεκτικοί χώροι, τότε και ο χώρος γινομένου X× Υ είναι τοπικά συνεκτικός.

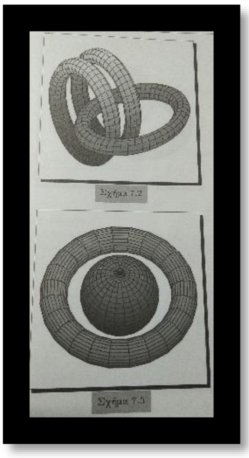
<u>Λύση</u>

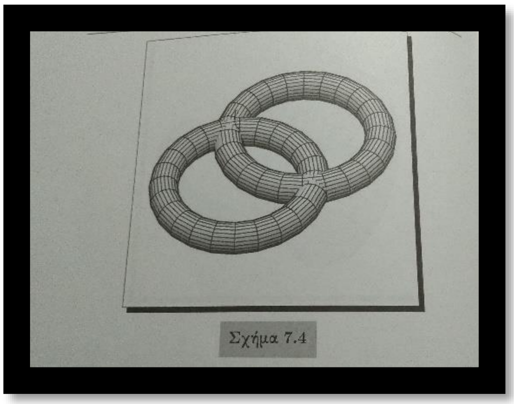
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τοπικά συνεκτικός εάν έχει βάση από ανοικτά συνεκτικά σύνολα. Αφού οι X, Y είναι τοπικά συνεκτικοί χώροι με τις αντίστοιχες βάσεις B και B^*, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G, H τα οποία τα $G \in B$ και $H \in B^*$ και το πεπερασμένο γινόμενο X× Υ που αποτελείται από τοπικά συνεκτικούς χώρους είναι το { G× H: $G \in B$ και $H \in B^*$} είναι βάση για το χώρο γινομένου X× Υ. Τώρα κάθε G× H είναι συνεκτικό αφού τα G,H συνεκτικά. Αφού το X × Υ έχει συνεκτικέ βάσεις τότε ο χώρος γινομένου είναι τοπικά συνεκτικός.

28.Να εξετασθεί αν οι υπόχωροι του R^3 που φαίνονται στα σχήματα 7.2, 7.3 και 7.4 είναι συνεκτικοί

<u>Λύση</u>

Η εικόνα 7.3 δεν είναι συνεκτικό αφού δεν μπορώ να βρω εάν δρόμο που να με πηγαίνει από την σφαίρα στον τόρο. Η εικόνα 7.4 είναι συνεκτική αφού μπορώ να πάω από τον έναν τόρο στον άλλο και άρα έχουμε ένα δρόμο. Τέλος, η εικόνα 7.2 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις : α) εάν τέμνονται οι τόροι τότε είναι συνεκτικό για τον ίδιο λόγω, β) εάν δεν τέμνονται οι τόροι δεν είναι συνεκτικοί καθώς δεν υπάρχει δρόμος που να ενώνει τους τρεις τόρους μεταξύ τους.





Κεφάλαιο 5

8. Έστω A= [0,1) και   B=(0,1]. Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=[0,1]

Cl(B)=[0,1]

Int(A)=(0,1)

Int(B)=(0,1)

Cl(AxB)= Cl(A)x Cl(B)=[0,1]x[0,1]

Int(AxB)= Int(A)x Int(B)=(0,1)x(0,1)

Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B))∪ $\left(Cl(B)xBd(A)\right)$.

9. Έστω A= (0,1) και B=(0,1). Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=[0,1]

Cl(B)=[0,1]

Int(A)=(0,1)

Int(B)=(0,1)

Cl(AxB)= Cl(A)x Cl(B)=[0,1]x[0,1]

Int(AxB)= Int(A)x Int(B)=(0,1)x(0,1)

Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B)) ∪ $(Cl(B)xBd(A))$.

10. Έστω A={0,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,…}και B={0,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,…}.Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl(A)=A   Int(A)={1/n}   Cl(B)=B   Int(B)={1/n} (Τα υπόλοιπα για τον αναγνώστη όπως στην 9).

11. Έστω A=[0,1]και B=$\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$.Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο **RxR** τα σύνολα Int(AxB), Cl(AxB) και Bd(AxB).

Λύση

Cl([0,1])=[0,1] Int([0,1])=(0,1) Cl(B)=B Int(B)={1/n} (Τα υπόλοιπα για τον αναγνώστη όπως στην 9)

12.Να βρεθούν στο χώρο **RxR** τα σύνολα Int(QxQ), Cl(QxQ) και Bd(QxQ).

Λύση

Cl(Q)=R

Int(Q)=∅

Cl(QxQ)= Cl(Q)x Cl(Q)=RxR

Int(QxQ)= Int(Q)x Int(Q)=∅x∅

Bd(QxQ)=(Cl(Q)xBd(Q)))∪(Cl(Q)xBd(Q)).

13. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(QxR), Cl(QxR) και Bd(QxR).

Λύση

Cl(Q)=R Int(Q)=∅ Cl(R)=R Int(R)=∅

Cl(QxR)= Cl(Q)x Cl(R)=RxR

Int(QxR)= Int(Q)x Int(R)=$\emptyset x \emptyset$

Bd(QxR)=(Cl(Q)xBd(R)) ∪(Cl(R)xBd(Q)).

14. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(NxQ), Cl(NxQ) και Bd(NxQ).

Λύση

Cl(Q)=R Int(Q)= ∅ Cl(N)=N Int(N)= ∅

Cl(QxN)= Cl(Q)x Cl(N)=RxN

Int(QxN)= Int(Q)x Int(N)=$\emptyset x \emptyset$

Bd(QxN)(κοίτα 13).

15. Να βρεθούν στο χώρο RxR τα σύνολα Int(NxR), Cl(NxR) και Bd(NxR).

Λύση

Με τη βοήθεια των 13 και 14.

17. Έστω A= [0,1]x [0,1]. Να βρεθούν στο χώρο γινόμενο RxR τα σύνολα Int(A), Cl(A) και Bd(A).

Λύση

Cl(A)= Cl([0,1])x Cl([0,1])=[0,1]x[0,1]

Int(A)= Int([0,1])x Int([0,1])= (0,1)x(0,1)

Bd([0,1]x[0,1]) (κοίτα 8 όπως στην άλλη).

19.Έστω Α υποσύνολο του τοπολογικού χώρου Χ και Β υποσύνολο του τοπολογικού χώρου Υ. Να αποδειχθεί ότι στο χώρο γινόμενο ΧxY ισχύουν τα εξής:

(1) Int(AxB)= Int(A)x Int(B)

(2) Bd(AxB)=(Cl(A)xBd(B))∪ $(Bd(A)xCl(B))$

Λύση

(1) Bd(AxB)= Cl(AxB)\Int(AxB)= Cl(A)x Cl(B)\(Int(A)x Int(B))=(Cl(A)\Int(A)XB)∪(Ax(Cl(B)\Int(B)))= (Cl(A)xBd(B))∪(Bd(A)xCl(B)).
(2) Για να δείξω την ισότητα πρέπει να δείξω την ⊃, ⊂.Η σχέση ⊂ είναι προφανής. Το ⊃ εάν z=(x,y)ϵInt(AxB) τότε το z έχει μια στοιχειώδη περιοχή zϵW=UxV⊂AxB,όπου αυτό συμαίνει ότι το x έχει μία ανοικτή περιοχή U_x ⊂A και V_y⊂B άρα xϵIntA και yϵIntB άρα z=(x,y)ϵInt(AxB).

20.Έστω Χ και Υ τοπολογικοί χώροι, p:XxY→ X, q:XxY→ Y η πρώτη και η δεύτερη προβολή αντίστοιχα.Να αποδειχθεί ότι αν U_1 ανοικτό υποσύνολο του Χ και U_2 ανοικτό υποσύνολο του Υ τότε:
(α)$p^{-1}(U_1) = U_1 \times Y$
(b)$q^{-1}(U_2) = X \times U_2$
(c)$p(U_1 \times U_2) = U_1$
(d)$q(U_1 \times U_2) = U_2$
Λύση
(α) $p^{-1}(U_1)$={zϵXxY|p(z)ϵU_1}={(x,y)ϵXxY|xϵU_1}=U_1xY
(b)η ίδια με το (α).
(c)$p(U_1 \times U_2)$={με βάση τον ορισμό}.
(d)ίδια λύση με το (c).

22.Να αποδειχθεί ότι το σύνολο Δ={(α,…,α)ϵX^n:αϵΧ} είναι κλειστό υποσύνολο του X^n. Όπου Χ τοπολογικός χώρος και n φυσικός αριθμός.
Λύση
Έστω (χ,y)∉Δ. Τότε τα σημεία χ,y με τα αντίστοιχα ανοιχτά όπου $U_\chi \cap V_y = \emptyset$,τότε $(U_\chi x V_y) \cap \Delta = \emptyset$.Το $U_x x V_y \subset XxY \backslash \Delta$ άρα το Xx…xX\Δ είναι ανοικτό.

23.Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι, $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$. Να αποδειχθεί ότι γενικάδεν ισχύει ο τύπος:

$(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \setminus A) \times (Y \setminus B)$

Λύση

Για να ισχύει θα πρέπει:

$(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \setminus A \times Y) \cup (Y \setminus B \times X)$.