ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη 3 Ιουνίου 2021

8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Α1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int(3x^2 - e^x + συνx - π)dx$

Λύση:

$$\int(3x^2 - e^x + συνx - π)dx = \frac{3x^3}{3} - e^x + ημx - πx + c = x^3 - e^x + ημx - πx + c$$

Α2 Δίνεται η λέξη ΠΑΝΔΗΜΙΑ.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της.

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της που αρχίζουν με το γράμμα Π και τελειώνουν με το γράμμα Α.

Λύση:

(α) $M_8^ε = \frac{8!}{2!} = 20160$ αναγραμματισμοί

(β) $M_6 = 6! = 720$ αναγραμματισμοί

Α3 Να μετατρέψετε την πιο κάτω τριγωνομετρική παράσταση σε αλγεβρική παράσταση του x:

$$συν(τοξημ(4x))\,,\quad 0 \le x \le \frac{1}{4}$$

Λύση:

Θέτω $τοξημ(4x) = θ \Rightarrow ημθ = 4x$, όπου $0 \le 4x \le 1 \Rightarrow 0 \le ημθ \le 1 \Rightarrow θ \in \left[0, \frac{π}{2}\right]$

$$συν(τοξημ(4x)) = συνθ$$

Έχουμε:

$$ημ^2θ + συν^2θ = 1 \Rightarrow 16x^2 + συν^2θ = 1 \Rightarrow συνθ = \sqrt{1 - 16x^2} \quad (συνθ \ge 0)$$

$$\Rightarrow συν(τοξημ(4x)) = \sqrt{1 - 16x^2}$$

Α4 (α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, με εστίες τα σημεία $E(4,0)$ και $E'(-4,0)$, αν το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δυο εστίες της είναι ίσο με 10 μονάδες.

Λύση:

(α) Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από δυο σταθερά σημεία E και E' του επιπέδου είναι σταθερό και μεγαλύτερο του EE'.

(β) $E(4,0), E'(-4,0) \Rightarrow \gamma = 4$

Αν Τ τυχαίο σημείο της έλλειψης τότε ΤΕ + ΤΕ΄ =10 (ορισμός της έλλειψης)

$\Rightarrow 2\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$

$E(4,0), E'(-4,0) \Rightarrow \alpha > \beta \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow$

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \beta = 3$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

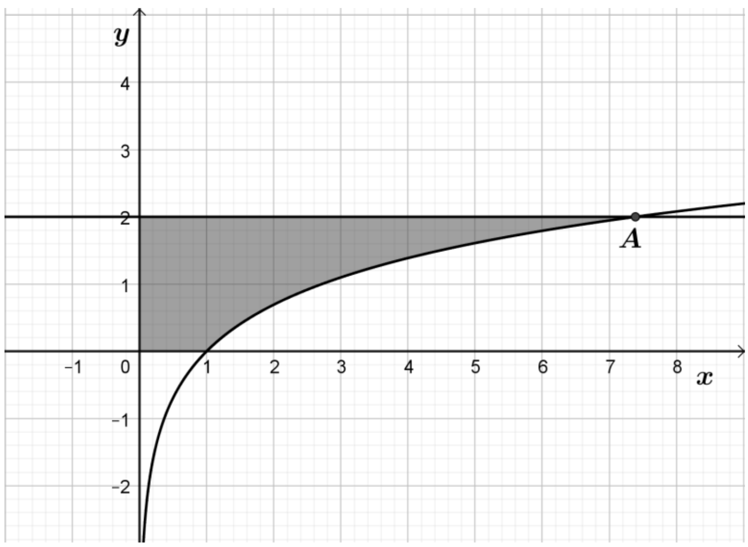
Α5 Δίνεται το χωρίο το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = lnx$, $x \in (0, +\infty)$, της γραφικής παράστασης της ευθείας $y = 2$ και των αξόνων των συντεταγμένων. Να βρείτε:

(α) το εμβαδόν του χωρίου

(β) τον όγκο που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα $y'y$.

Λύση:

(α)



$y = lnx \Rightarrow x = e^y$

$E = \int_0^2 e^y dy = [e^y]_0^2 = e^2 - e^0 = (e^2 - 1)$ τ.μ.

(β) $V = \pi \int_0^2 e^{2y} dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^0) = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$ κ.μ.

Α6 Για να παρακολουθήσουν πέντε φοιτητές ένα σεμινάριο, με φυσική παρουσία, θα πρέπει να υποβληθούν σε έναν από τους παρακάτω τρεις ελέγχους:

i) μοριακό έλεγχο
ii) ρινικό έλεγχο ταχείας ανίχνευσης
iii) έλεγχο ταχείας ανίχνευσης με δείγμα σάλιου

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί;
(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί, αν δύο συγκεκριμένοι φοιτητές θα υποβληθούν σε μοριακό έλεγχο;

Λύση:

(α) $\delta_5^3 = 3^5 = 243$ τρόποι

β΄ τρόπος

Φ1	Φ2	Φ3	Φ4	Φ5
3	3	3	3	3

Από αρχή της απαρίθμησης $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ τρόποι

(β) $\delta_2^1 \cdot \delta_3^3 = 1^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 27 = 27$ τρόποι

β΄ τρόπος

Φ1	Φ2	Φ3	Φ4	Φ5
1	1	3	3	3

Από αρχή της απαρίθμησης $\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ τρόποι

Α7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x^2+1) - x^2$, $x \in R$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά της ακρότατα.
(β) Να αποδείξετε ότι: $ln\,(x^2+1) \le x^2$, $x \in R$

Λύση:

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = \frac{2x-2x^3-2x}{x^2+1} = \frac{-2x^3}{x^2+1}$$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^3}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$
Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0{,}0)$ τοπικό (και ολικό) μέγιστο.

(β) $f(0) = 0$ ολικά μέγιστη τιμή της f $\Rightarrow f(x) \le 0$ για κάθε $x \in R$

$\Rightarrow ln(x^2+1) - x^2 \le 0 \Rightarrow ln(x^2+1) \le x^2$ για κάθε $x \in R$

A8 Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta$ και το τυχαίο σημείο της $P(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\beta\eta\mu\theta)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η κάθετη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Λ.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P είναι η $(\alpha\eta\mu\theta)x-(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y=(\alpha^2-\beta^2)\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $P\Lambda$ είναι έλλειψη.

Λύση:

(α) $\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2y}{\beta^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta^2x}{\alpha^2y}$

(β) $\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}\ \Rightarrow\ \lambda_{\kappa\alpha\theta}=\frac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}\quad \eta\mu\theta\neq0,\ \sigma\upsilon\nu\theta\neq0\ \ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Εξίσωση της κάθετης:

$$y-\beta\eta\mu\theta=\frac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)\Rightarrow$$

$$\beta\sigma\upsilon\nu\theta y-\beta^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha\eta\mu\theta x-\alpha^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow$$

$$(\alpha\eta\mu\theta)x-(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y=(\alpha^2-\beta^2)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

(γ) Για $x=0\Rightarrow-(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y=(\alpha^2-\beta^2)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\eta\mu\theta\Rightarrow$

$$\Lambda\left(0,\ \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\eta\mu\theta\right)$$

$M(x,y)$ μέσο του $P\Lambda$

$$x=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+0}{2}=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{2x}{\alpha}$$

$$y=\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\eta\mu\theta+\beta\eta\mu\theta}{2}=\frac{(\beta^2-\alpha^2)\eta\mu\theta+\beta^2\eta\mu\theta}{2\beta}$$

$$\Rightarrow y=\frac{(2\beta^2-\alpha^2)\eta\mu\theta}{2\beta}\Rightarrow\eta\mu\theta=\frac{2\beta y}{(2\beta^2-\alpha^2)}$$

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Rightarrow\frac{4x^2}{\alpha^2}+\frac{4\beta^2y^2}{(2\beta^2-\alpha^2)^2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\right)^2}=1\quad \text{εξίσωση έλλειψης}\ \left(\text{αν } \alpha\neq\beta\sqrt{2}\quad\text{και}\quad\alpha\neq2\beta\right)$$

Αν $\alpha=2\beta$ τότε ο Γ.Τ. του σημείου Μ ανήκει σε κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=\beta^2$

Αν $\alpha=\beta\sqrt{2}$ τότε $M\left(\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{2},0\right),\quad\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ M(x,0)$, όπου $0<x<\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ ο Γ.Τ του σημείου Μ είναι ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα x΄x

Οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι ειδικές περιπτώσεις έλλειψης.

A9 Με την υπόθεση ότι $1-\eta\mu 2x+2\sigma\upsilon\nu 2x\neq 0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{dx}{1-\eta\mu 2x+2\sigma\upsilon\nu 2x}\quad,\ \ t=\varepsilon\varphi x\,,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

Λύση:

$$A\nu\ t=\varepsilon\varphi x\ \Rightarrow\ \eta\mu 2x=\frac{2t}{t^2+1}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t=\varepsilon\varphi x, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\ \Rightarrow x=\tau o\xi\varepsilon\varphi t, t\in(0,1)\ \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{dx}{1-\eta\mu 2x+2\sigma\upsilon\nu 2x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{t^2+1}+\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}}=$$

$$\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-2t+2-2t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{-t^2-2t+3}=$$

$$-\int\frac{dt}{(t+3)(t-1)}$$

$$\frac{1}{(t+3)(t-1)}\equiv\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t-1}$$

$$1\equiv A(t-1)+B(t+3)$$

$$1\equiv(A+B)t-A+3B$$

$$A+B=0\Rightarrow A=-B$$

$$-A+3B=1\Rightarrow B+3B=1\Rightarrow B=\tfrac{1}{4}\ \text{και}\ A=-\tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+3}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{4}ln|t+3|-\frac{1}{4}ln|t-1|+c=$$

$$\frac{1}{4}ln\left|\frac{t+3}{t-1}\right|+c=\frac{1}{4}ln\left|\frac{\varepsilon\varphi x+3}{\varepsilon\varphi x-1}\right|+c$$

A10 Να δείξετε ότι η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = lnx - \frac{1}{x}$ στο $[1,2]$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $f(1) = ln1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = ln2 - \frac{1}{2} > 0 \ \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1,2)$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες στο $(1,2)$, τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ αφού ρ_1 και ρ_2 ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} = 0$, άτοπο διότι $\xi \in (1,2)$ και άρα $\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} > 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες στο $(1,2)$. Επειδή, όμως, αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα, αυτό σημαίνει ότι αυτή θα είναι και μοναδική.

Άρα η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

β΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = lnx - \frac{1}{x}$ στο $[1,2]$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $f(1) = ln1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = ln2 - \frac{1}{2} > 0 \ \Rightarrow f(1) < 0 < f(2)$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, δηλαδή το ξ είναι μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (1,2) \Rightarrow$ η f γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

Επομένως, αφού υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1,2)$ τότε αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή, η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

Πεδίο ορισμού $\quad x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow R - \{2\}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

$y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1 \Rightarrow (-2,0), (1,0)$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -\dfrac{2}{-2} = 1 \Rightarrow (0,1)$

Μονοτονία/Ακρότατα

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 2}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \quad , x \neq 2$$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4,\ x \neq 2$ (διπλή)

x	$-\infty$		0		2΄΄		4		$+\infty$
f'		+	0	−	‖	−	0	+	
f		↗		↘	‖	↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσας στο $(-\infty, 0]$ και στο $[4, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$ και στο $(2,4]$

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{2}{-2} = 1 \Rightarrow (0,1)$ τοπικό μέγιστο.

Για $x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{16+4-2}{4-2} = 9 \Rightarrow (4,9)$ τοπικό ελάχιστο.

Ασύμπτωτες:

Για $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \to 2^-}(x^2 + x - 2) = 4$ και $\lim_{x \to 2^-}(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x^2 + x - 2)}{x - 2} = -\infty$$

Για $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 2^+}(x^2 + x - 2) = 4$ και $\lim_{x \to 2^+}(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x^2 + x - 2)}{x - 2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \to -\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 + x - x^2 + 2x}{x - 2}\right) =$$

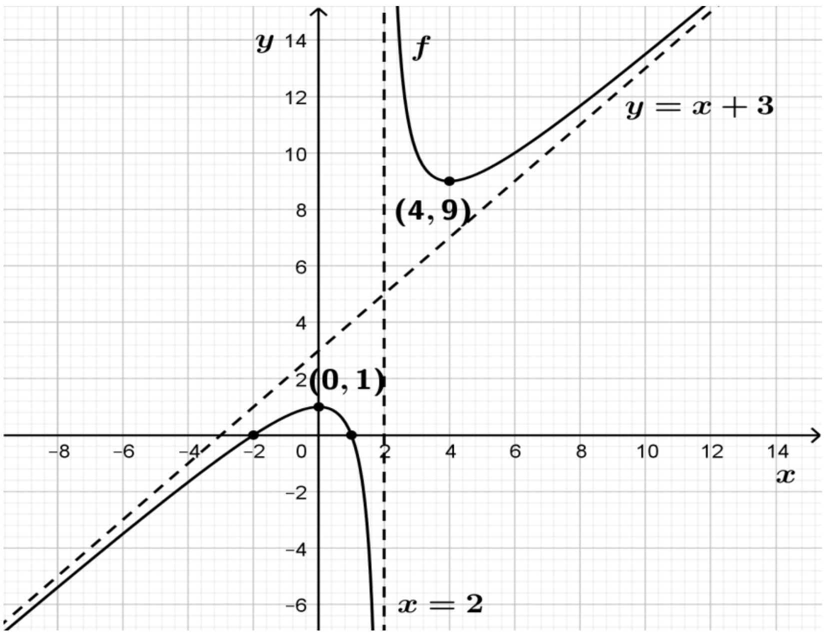
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = 3 = \beta$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + x - x^2 + 2x}{x - 2}\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3 = \beta$$

Άρα $y = x + 3$ πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$.



B2 Δίνονται οι συναρτήσεις $h: R \to R$ και $g: R \to R$. Η συνάρτηση h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $h'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ και $g(x) \cdot h'(x) = h(x)$, για κάθε $x \in R$. Αν η συνάρτηση h παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0, να βρείτε την προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της συνάρτησης g στο x_0 με τον άξονα $x'x$.

Λύση:

$$g(x) \cdot h'(x) = h(x)\,, h'(x) \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow g(x) = \frac{h(x)}{h'(x)}$$

⇒ Η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, επομένως:

$$g'(x)h'(x) + h''(x)g(x) = h'(x) \qquad (1)$$

Η συνάρτηση h παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 \Rightarrow h''(x_0) = 0$

Άρα αντικαθιστώντας στην (1) $x = x_0 \Rightarrow$

$$g'(x_0)h'(x_0) + h''(x_0)g(x_0) = h'(x_0)$$

$$\Rightarrow g'(x_0)h'(x_0) + 0 = h'(x_0), \quad h'(x_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = 1\,,$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης της g στο x_0 ισούται με $1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Β3 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t > 0$. Η προβολή του σημείου A πάνω στον άξονα $y'y$ είναι το σημείο B και η προβολή του σημείου B πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα OA είναι το σημείο M, όπου O η αρχή των αξόνων. Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος MB τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ και η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$ τέμνει την παραβολή στο σημείο Δ.

(α) Να δείξετε ότι το σημείο Γ είναι το $(4,0)$.

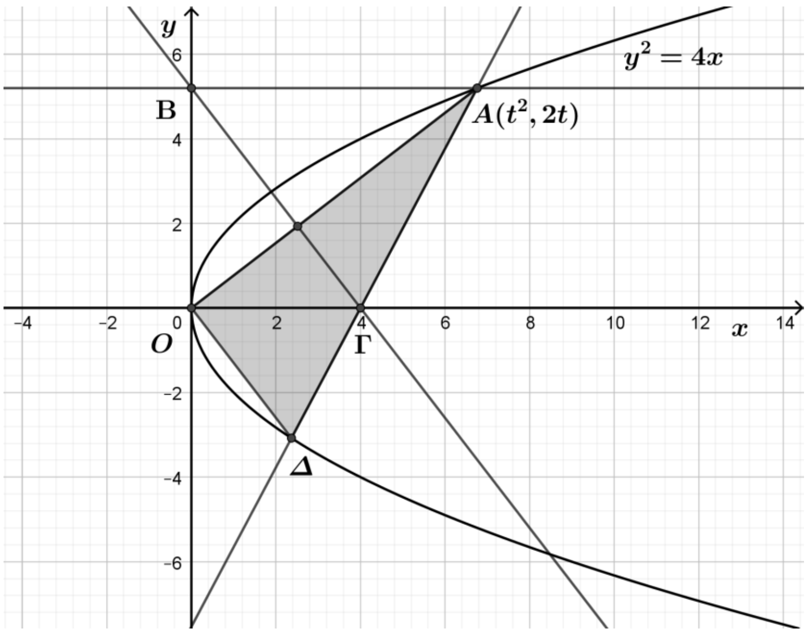
(β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Delta$ δίνεται από τη σχέση:

$$E(t) = \frac{16}{t} + 4t \ , \ \ t > 0$$

(γ) Να βρείτε την τιμή του t, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Delta$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση:

(α)



$\lambda_{OA} = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t} \Rightarrow \lambda_{BM} = -\frac{t}{2}$.

$B(0,2t) \Rightarrow y - 2t = -\dfrac{t}{2}(x - 0) \Rightarrow B\Gamma\colon y = -\dfrac{t}{2}x + 2t$

Για $y = 0 \Rightarrow -\frac{t}{2}x + 2t = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \Gamma(4,0)$

(β) A, Γ και $\Delta(\rho^2, 2\rho)$ συνευθειακά $\Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = \lambda_{A\Delta}$

$$\Rightarrow \frac{2t}{t^2 - 4} = \frac{2t - 2\rho}{t^2 - \rho^2} \ \Rightarrow \ \frac{2t}{t^2 - 4} = \frac{2(t-\rho)}{(t-\rho)(t+\rho)} \ , \qquad t - \rho \neq 0$$

$$\Rightarrow t^2 + t\rho = t^2 - 4 \Rightarrow t\rho = -4 \ \Rightarrow \ \rho = -\frac{4}{t} \ \Rightarrow \ \Delta\left(\frac{16}{t^2}, -\frac{8}{t}\right)$$

$$\begin{vmatrix} t^2 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{16}{t^2} & -\frac{8}{t} & 1 \end{vmatrix} = (-1)\left((-8t) - \frac{32}{t}\right) = 8t + \frac{32}{t}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|8t + \frac{32}{t}\right| = 4t + \frac{16}{t} \ , \ \ (t > 0) \Rightarrow E(t) = 4t + \frac{16}{t} \ , \ t > 0$$

(γ) $E'(t) = 4 - \frac{16}{t^2}$. Θέτω $E'(t) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{16}{t^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow$

$t = 2$ (δεκτή), $t = -2$ (απορρίπτεται)

t	0		2		$+\infty$
$E'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$E(t)$	‖	↘		↗	

Η συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$

Η συνάρτηση E είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$

Για $t = 2 \Rightarrow$ το εμβαδόν E γίνεται ελάχιστο.

<u>β΄ τρόπος για το (γ)</u>

$$E(t) = 4t + \frac{16}{t} \Rightarrow E(t) = 4\left(t + \frac{4}{t}\right) \Rightarrow E(t) = 4\left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2 + 16$$

$\Rightarrow \ E(t) \ \geq 16 \ \ \forall\, t > 0$, με τη συνάρτηση $E(t)$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή 16 όταν $4\left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Rightarrow t = 2$

Επομένως, για $t = 2 \Rightarrow$ το εμβαδόν E γίνεται ελάχιστο.

B4 Δίνεται η συνάρτηση $g: R \to R$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι:

i) $g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} = 2$

ii) $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$

(α) Να δείξετε ότι: $g'(x)\, e^{g(x)} = 2x - 1$, για κάθε $x \in R$

(β) Να βρείτε συνάρτηση g που να ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii)

Λύση:

(α)

$$g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} = 2 \Rightarrow \int \left(g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)}\right)dx = \int 2\, dx \Rightarrow$$

$$\int \left(g'(x)e^{g(x)}\right)' dx = \int 2\, dx \Rightarrow$$

$$g'(x)e^{g(x)} = 2x + c_1$$

Για $x = 1 \Rightarrow g'(1)e^{g(1)} = 2 + c_1 \Rightarrow e^0 = 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

$$\Rightarrow g'(x)\, e^{g(x)} = 2x - 1$$

(β)

$$\int g'(x)e^{g(x)} dx = \int (2x - 1)dx$$

$$\int \left(e^{g(x)}\right)' dx = \int (2x - 1)dx$$

$$e^{g(x)} = x^2 - x + c_2$$

Για $x = 1 \Rightarrow e^{g(1)} = 1 - 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = e^0 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow e^{g(x)} = x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1 > 0 \ \ \forall\, x \epsilon R$ διότι $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \ \kappa\alpha\iota\ \alpha = 1 > 0 \Rightarrow$

$g(x) = ln(x^2 - x + 1)$, $x \in R$.

B5 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0,\beta]$, $\beta > 0$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

i) $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [0,\beta]$
ii) $f(x) + f(\beta - x) = c$, $\forall\, x \in [0,\beta]$, όπου c σταθερά και $c > 0$.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $\frac{\beta c}{2}$ τ.μ.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} + 1,\ x \in [0,\pi]$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής, του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$.

Λύση:

(α) $E = \int_0^\beta f(x)dx$, $(f(x) > 0)$

$f(x) + f(\beta - x) = c \Rightarrow f(x) = c - f(\beta - x)$

$\Rightarrow E = \int_0^\beta (c - f(\beta - x))dx$

Θέτω $u = \beta - x \Rightarrow dx = -du$

Για $x = 0 \Rightarrow u = \beta$ και για $x = \beta \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow E = -\int_\beta^0 (c - f(u))du = \int_0^\beta \big(c - f(x)\big)dx = [cx]_0^\beta - \int_0^\beta f(x)dx$$

$$\Rightarrow E = c\beta - E \Rightarrow 2E = c\beta \Rightarrow E = \frac{c\beta}{2}$$

(β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως γινόμενο, πηλίκο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και καλά ορισμένη αφού $1 + \eta\mu^2 x \neq 0$, $\forall\, x \in [0,\pi]$

$$g(x) = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} + 1 = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x + 1 + \eta\mu^2 x}{1+\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x(\sigma\upsilon\nu x + 1) + 1}{1+\eta\mu^2 x},\ x \in [0,\pi]$$

$$\eta\mu^2 x \geq 0,\ \ \sigma\upsilon\nu x + 1 \geq 0 \Rightarrow \eta\mu^2 x(\sigma\upsilon\nu x + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \eta\mu^2 x(\sigma\upsilon\nu x + 1) + 1 > 0 \\ 1 + \eta\mu^2 x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\eta\mu^2 x(\sigma\upsilon\nu x + 1) + 1}{1 + \eta\mu^2 x} > 0 \Rightarrow\ g(x) > 0\ \forall x \in [0,\pi]$$

$$g(x) + g(\pi - x) = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 + \frac{\eta\mu^2(\pi - x)\ \sigma\upsilon\nu(\pi - x)}{1 + \eta\mu^2(\pi - x)} + 1, \quad \mu\varepsilon\ \ \beta = \pi$$

$$\Rightarrow g(x) + g(\pi - x) = \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 - \frac{\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 = 2 = c$$

Επομένως ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις για να ισχύει το (α) $\Rightarrow$

$E = \frac{2\pi}{2} = \pi$ τ.μ.