ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία εξέτασης: ΣΑΒΒΑΤΟ 12/6/2021

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Α1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int(2x^3-2x+1)dx$

Λύση:

$$\int(2x^3-2x+1)\,dx=\frac{x^4}{2}-x^2+x+c$$

Α2. Δίνεται ο αριθμός των ημερών με άδεια ασθενείας 14 υπαλλήλων μιας εταιρείας σε ένα έτος:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{3},\ \mathbf{7},\ \mathbf{5},\ \mathbf{15},\ \mathbf{0},\ \mathbf{8},\ \mathbf{7},\ \mathbf{10},\ \mathbf{0},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{8},\ \mathbf{5}$$

Να βρείτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των πιο πάνω παρατηρήσεων.

Λύση:

0, 0, 0, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 15

$Q_1=3$ (4^{η} θέση)

$Q_3=8$ (11^{η} θέση)

$IQR=Q_3-Q_1=8-3=5$

Α3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=x^2-4x\ ,\ x\epsilon\mathcal{R}$$

Λύση:

$f(x)=x^2-4x$

$f'(\chi)=2x-4$

$f'(\chi) = 0$

$2x - 4 = 0 \Longrightarrow$
$2x = 4 \Longrightarrow$
$x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

A4. **(α)** Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΦΙΛΟΤΙΜΟ**.
(3 μονάδες)

(β) Πόσοι από τους αναγραμματισμούς αυτούς έχουν τα σύμφωνα συνεχόμενα; (2 μονάδες)

<u>Λύση:</u>

(α)$M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

(β) $M_4 \cdot M_5^{\varepsilon} = 4!\frac{5!}{2!2!} = 24 \cdot 30 = 720$

A5. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-1{,}2 \ , \ 3{,}2] \longrightarrow \mathcal{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο Γ.

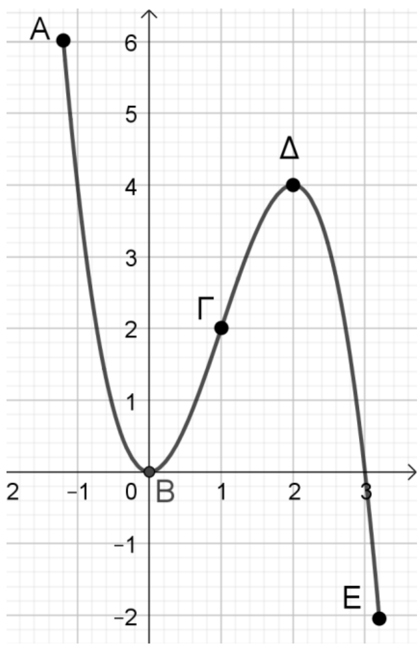
Από την γραφική παράσταση να βρείτε:

(α) Τα ακρότατα της συνάρτησης (τοπικά και ολικά) και να τα χαρακτηρίσετε.
(2 μονάδες)

(β) Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι κυρτή. (1 μονάδα)

(γ) Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (1 μονάδα)

(δ) Την τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο Γ. (1 μονάδα)



<u>Λύση:</u>

(α) Α: $f(-1{,}2) = 6$ <u>Ολικό μέγιστο</u>

Β: $f(0) = 0$ <u>Τοπικό ελάχιστο</u>

Δ: $f(2) = 4$ <u>Τοπικό μέγιστο</u>

Ε: $f(3{,}2) = -2$ <u>Ολικό ελάχιστο</u>

(β) f κυρτή στο $[-1{,}2 \ , \ 1]$

(γ) f γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $[1\,, 2]$

(δ) $f''(1) = 0$

Α6. Δώδεκα (12) λύκεια της Κύπρου συμμετέχουν σε ένα διαγωνισμό δημιουργικότητας.

(α) Τα λύκεια που διακρίνονται στις τρεις πρώτες θέσεις βραβεύονται με χρυσό, αργυρό και χάλκινο έπαθλο. Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι απονομής των βραβείων ανάμεσα στα 12 λύκεια;

(β) Από τα υπόλοιπα λύκεια που δεν διακρίνονται στις τρεις πρώτες θέσεις, θα επιλεγεί μια ομάδα τριών λυκείων για να λάβουν μέρος σε ένα συνέδριο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή;

<u>Λύση:</u>

(α) <u>Α΄ Τρόπος:</u> $\Delta_3^{12} = \frac{12!}{9!} = 1320$

<u>Β΄ Τρόπος:</u>

Φάσεις	Χρυσό	Αργυρό	Χάλκινο
Τρόποι	12	11	10

Σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή):
$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

(β) $12 - 3 = 9$

$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$

A7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 2$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με $x = 1$ και σημείο καμπής για $x = 0$. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Λύση:

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 3$

Στα τοπικά ακρότατα
$f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta - 3 = 0$

Στο σημείο καμπής $f''(x) = 0$
Επομένως, $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta = 0$
Άρα $f''(0) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0}$

Επομένως, $3\alpha - 0 - 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

A8. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad , \; P(B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \; P(AUB) = \frac{3}{4}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B)$ (2 μονάδες)

(β) $P(B/A)$ (1,5 μονάδα)

(γ) $P(B \cap A')$ (1,5 μονάδα)

Λύση:

(α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(β) $P(B \,/\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$

(γ) $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

A9. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x - 12$, $\forall\, x \in \mathcal{R}$.

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση f αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4, -12)$. (3 μονάδες)

(β) Να χαρακτηρίσετε το τοπικό ακρότατο στο σημείο A. (2 μονάδες)

__Λύση:__

(α) $f'(x) = \int (6x - 12)dx = 3x^2 - 12x + c_1$

Αφού η συνάρτηση f παρουσιάζει τ.α. στο $A(4, -12)$ πρέπει $f'(4) = 0$ και $f(4) = -12$.

$f'(4) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + c_1 = 0 \Rightarrow 48 - 48 + c_1 = 0$
$\Rightarrow c_1 = 0$

Επομένως, $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f(x) = \int (3x^2 - 12x)dx$
$\Longrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + c_2$

$f(4) = -12 \Rightarrow 4^3 - 6 \cdot 4^2 + c_2 = -12 \Rightarrow 64 - 96 + c_2 = -12$
$\Rightarrow c_2 = 32 - 12 = 20$

Επομένως $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

(β) $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow\ f'(x) = 0 \Rightarrow\ 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$
$3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ και $x = 4$

Χ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$.

Επομένως στο $(4, -12)$ η συνάρτηση έχει τ. ελάχιστο.

A10. Σε έρευνα ερωτήθηκαν 200 ψηφοφόροι για την ηλικία τους και την προτίμησή τους μεταξύ δυο υποψηφίων στις τελευταίες βουλευτικές εκλογές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

	18-25 ετών	**26-39 ετών**	**40 ετών και άνω**	**Σύνολο**
Υποψήφιος Α	40	22	15	77
Υποψήφιος Β	50	46	10	106
Καμιά προτίμηση	10	4	3	17
Σύνολο	100	72	28	200

Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου το άτομο να βρίσκεται στην ηλικιακή ομάδα «26-39 ετών». (1 μονάδα)

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου το άτομο να προτιμά τον υποψήφιο Β, αν γνωρίζουμε ότι είναι 40 ετών και άνω.

(1 μονάδα)

(γ) Να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα:

Γ: «Το άτομο είναι 26 ετών και άνω και προτιμά τον υποψήφιο Α»

Δ: «Το άτομο είναι κάτω των 40 ετών και προτιμά τον υποψήφιο Α»

(3 μονάδες)

<u>Λύση:</u>

(α) $P(\text{«}26-39\text{ ετών»})=\frac{72}{200}$

(β) $P(\text{«προτιμά τον Β»} \mid \text{«}40\text{ ετών και άνω»})=\frac{10}{28}$

(γ) Από τον πίνακα υπολογίζουμε τις πιθανότητες $P(\Gamma)$, $P(\Delta)$ $P(\Gamma\cap\Delta)$ και $P(\Gamma)\cdot P(\Delta)$

Έχουμε:

$$P(\Gamma)=\frac{37}{200}$$

$$P(\Delta)=\frac{62}{200}=\frac{31}{100}$$

$\Gamma\cap\Delta=$ «Ο επιλεγμένος ψηφοφόρος είναι $26-39$ ετών και προτιμά τον υποψήφιο Α»

$$P(\Gamma\cap\Delta)=\frac{22}{200}$$

Άρα έχουμε $P(\Gamma)\cdot P(\Delta)=\frac{31}{100}\cdot\frac{37}{200}=\frac{1147}{20000}\neq\frac{22}{200}=P(\Gamma\cap\Delta)$

Άρα εφόσον $P(\Gamma)\cdot P(\Delta)\neq P(\Gamma\cap\Delta)$ τα ενδεχόμενα Γ και Δ δεν είναι ανεξάρτητα.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

Β1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4x^3 + 6x^2$. Να κάνετε την γραφική της παράσταση αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής καθώς και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

<u>Λύση:</u>

Πεδίο Ορισμού $A = \mathcal{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες
Αν $x = 0$ τότε $f(0) = 0$
αν $y = 0$ τότε $-4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow -2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = \frac{3}{2}$
Άρα σημεία $(0,0)$ και $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Διαστήματα μονοτονίας

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2 \Rightarrow f'(x) = -12x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -12x(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$

Τοπικά ακρότατα

$f(1) = -4 + 6 = 2$ και $f(0) = 0$ επομένως,

Έχει τοπικό ελάχιστο το $(0, 0)$ και τοπικό μέγιστο το $(1, 2)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -24x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		Κυρτή		Κοίλη	

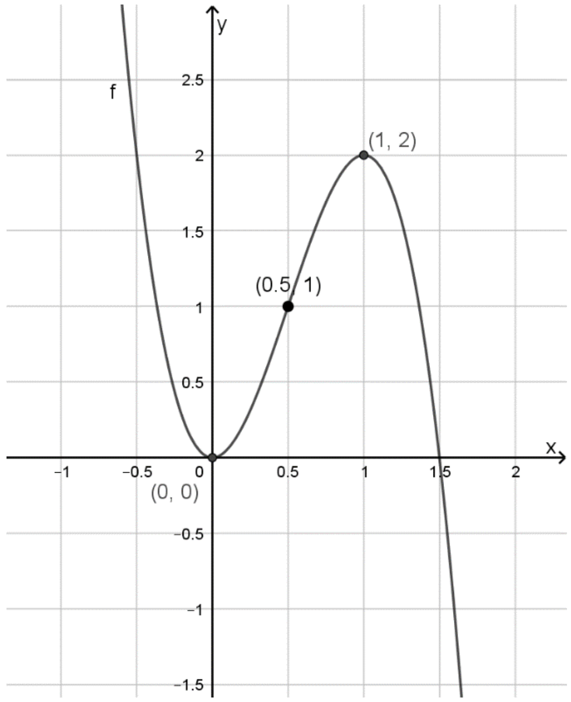
Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Για $x = \frac{1}{2}$ η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Συμπεριφορά στα άκρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -4x^3 = -4(+\infty) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -4x^3 = -4(-\infty) = +\infty$$



Β2. Η ημερήσια παραγωγή αντισωμάτων στον οργανισμό μετά τη λήψη ενός εμβολίου δίνεται από τη συνάρτηση $A(t)$, όπου t είναι ο χρόνος σε ημέρες από τη λήψη του εμβολίου. Δέκα (10) ημέρες μετά τη χορήγηση του εμβολίου η παραγωγή των αντισωμάτων στον οργανισμό φτάνει στις 125 μονάδες.

Δίνεται $A'(t) = 15 - \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 60$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $A(t)$ δίνεται από τον τύπο, $A(t) = -\frac{t^2}{4} + 15t$ (5 μονάδες)

(β) Πόσες ημέρες μετά τη χορήγηση του εμβολίου παρατηρείται η μεγαλύτερη ημερήσια παραγωγή αντισωμάτων στον οργανισμό; (3 μονάδες)

(γ) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ημερήσια παραγωγή μονάδων αντισωμάτων στον οργανισμό μετά τη χορήγηση του εμβολίου.

(2 μονάδες)

<u>Λύση:</u>

(α) Υπολογίζουμε την συνάρτηση $A(t)$. Έχουμε ότι:

$$A(t) = \int A'(t)dt = \int \left(15 - \frac{t}{2}\right) dt = 15t - \frac{t^2}{4} + c$$

Από τη συνθήκη $A(10) = 125$ έχουμε ότι:

$15 \cdot 10 - \frac{10^2}{4} + c = 125 \Rightarrow 150 - 25 + c = 125$

$\Rightarrow 125 + c = 125 \Rightarrow c = 0$

Έτσι, $A(t) = -\frac{t^2}{4} + 15t$

(β) Θέτω $A'(t) = 0 \Rightarrow 15 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow 15 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 30$ μέρες

Πίνακας προσήμων:

t	0		30		60
$A'(t)$		$+$	0	$-$	
$A(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η συνάρτηση $A(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,30]$

Η συνάρτηση $A(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[30,60]$

Άρα τοπικό (ολικό) μέγιστο όταν $t = 30$ μέρες.

Σε 30 μέρες μετά τη χορήγηση του εμβολίου παρατηρείται η μεγαλύτερη παραγωγή αντισωμάτων στον οργανισμό.

(γ) Η μεγαλύτερη ημερήσια παραγωγή μονάδων αντισωμάτων στον οργανισμό μετά τη χορήγηση του εμβολίου είναι:

$A(30) = -\frac{30^2}{4} + 15 \cdot 30 = -\frac{900}{4} + 450 = -225 + 450 = 225$ μονάδες

B3. Πέντε άτομα συναντώνται στο ισόγειο μιας πολυκατοικίας και μπαίνουν στον ανελκυστήρα για να ανεβούν σε ένα από τους επτά ορόφους της. Να βρείτε:

(α) Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν κατά τη συνάντησή τους; (όλοι ανταλλάσσουν χειραψίες μια μόνο φορά με τον κάθε ένα) (3 μονάδες)

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα πέντε άτομα να κατέβουν από τον ανελκυστήρα αν: (4 μονάδες)

i. Κάθε άτομο θα κατέβει σε διαφορετικό όροφο.

ii. Κάθε άτομο μπορεί να κατέβει σε οποιοδήποτε όροφο.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα δύο (2) τουλάχιστον άτομα να κατέβουν στον ίδιο όροφο. (3 Μονάδες)

<u>Λύση</u>:

(α) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

(β)

i. $\Delta_5^7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Φάσεις	1	2	3	4	5
Τρόποι	7	6	5	4	3

ii. $\delta_5^7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$

(γ) $1 - P(όλοι\ κατεβαίνουν\ σε\ διαφορετικούς\ ορόφους) =$
$1 - \frac{2520}{16807} = 1 - 0{,}149 = 0{,}85$

B4. Το κόστος της μηνιαίας παραγωγής x τόνων χαλουμιού ενός εργοστασίου σε ευρώ είναι:

$$K(x) = -x^2 + 2000x + 1000\ , \quad 1 \le x \le 1000$$

Η τιμή πώλησης ανά τόνο δίνεται από τη σχέση $(-5x + 6000)$ ευρώ.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση του μηνιαίου κέρδους από την πώληση x τόνων χαλουμιού δίνεται από τη σχέση, (4 μονάδες)

$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000$$

(β) Ποια πρέπει να είναι η μηνιαία παραγωγή ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο. (4 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος. (2 μονάδες)

Λύση:

(α) Τιμή πώλησης των x τόνων παραγωγής:
$x(-5x + 6000) = -5x^2 + 6000x$

Μηνιαίο κέρδος:

$$P(x) = -5x^2 + 6000x - (-x^2 + 2000x + 1000) \Rightarrow$$
$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000$$

(β) Για μέγιστο κέρδος πρέπει,
$P'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 4000 = 0 \Rightarrow x = 500$ τόνους / μήνα.

Χ	1	500	1000
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000 \Rightarrow P(500) = 999000$ ευρώ.

Β5. Σε ένα γραφείο δύο υπολογιστές Α και Β εκτυπώνουν στον ίδιο εκτυπωτή. Το 70% των εκτυπώσεων προέρχεται από τον υπολογιστή Α και το υπόλοιπο από τον Β. Σε κείμενα που ξεπερνούν τις 30 σελίδες, η πιθανότητα να γίνει διακοπή στην εκτύπωση είναι 1% για τα κείμενα που προέρχονται από τον υπολογιστή Α, και 2% για αυτά που προέρχονται από τον Β.

Εκτυπώνεται ένα κείμενο άνω των 30 σελίδων.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να γίνει διακοπή κατά την εκτύπωση του κειμένου. (6 μονάδες)

(β) Αν έχει γίνει διακοπή κατά την εκτύπωση, να υπολογίσετε την πιθανότητα το κείμενο να προέρχεται από τον υπολογιστή Β. (4 μονάδες)

Λύση:

(α)

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$A =$ «Η εκτύπωση γίνεται από τον υπολογιστή Α»

$B =$ «Η εκτύπωση γίνεται από τον υπολογιστή Β»

Δ = «Διακοπή κατά την εκτύπωση σε κείμενα που ξεπερνούν τις 30 σελίδες»

Έχουμε:

$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(\Delta|A) = \frac{1}{100} \qquad P(\Delta|B) = \frac{2}{100}$

Επομένως,

$$P(\Delta) = P(\Delta \cap A) + P(\Delta \cap B) = P(\Delta|A)P(A) + P(\Delta|B)P(B)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{100} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{1000} + \frac{6}{1000} = \frac{13}{1000}$$

(β)

$$P(B|\Delta) = \frac{P(B \cap \Delta)}{P(\Delta)} = \frac{P(\Delta|B)P(B)}{P(\Delta)} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{13}{1000}} = \frac{6}{13}$$

ΤΕΛΟΣ