ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 2.1 ΕΩΣ 2.3 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Πότε λέμε ότι μια ισότητα είναι ταυτότητα;

Β) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: ≪Για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha^6=\beta^6$ ισχύει $\alpha=\beta$≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $|x|=x\Leftrightarrow x\geq 0$

ii) Για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$

iii) Για κάθε θετικό ακέραιο ν και για οποιουσδήποτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει: $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$

iv) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta<0\Leftrightarrow|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$

v) Για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:
$(\alpha>\beta \text{ και } \gamma>\delta)\Rightarrow\alpha-\gamma>\beta-\delta$

Μονάδες: 4+6+5+5x2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $x\in\mathbb{R}$ και θεωρούμε τις παραστάσεις $K=(x+1)^3+(x-1)^3-x\left(x^2+6\right)$ και $\Lambda=x^4+\left(x-x^2\right)\left(x+x^2\right)$.

Α) Να αποδείξετε ότι: $K=x^3$ και $\Lambda=x^2$

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$N=\frac{2022^3+2020^3-2021\left(2021^2+6\right)}{2021^4+\left(2021-2021^2\right)\left(2021+2021^2\right)}$$

Γ) Έστω $M=\frac{K+\Lambda}{K-\Lambda}$ και ονομάζουμε Α το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ορίζεται η παράσταση Μ.

i) Να προσδιορίσετε το σύνολο Α.

ii) Να αποδείξετε ότι: $M=\frac{x+1}{x-1}$ για κάθε $x\in A$.

Δ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{49}{64},\frac{729}{125},1,\frac{343}{512}$ και $\frac{81}{25}$ αφού πρώτα αποδείξετε ότι:

i) $0<x<1\Rightarrow x^3<x^2<1$

ii) $x>1\Rightarrow x^3>x^2>1$

Μονάδες: 6+5+3+3+2+3+3=25

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

- $\alpha<\beta<\gamma$
- $|\alpha+\beta+\gamma|=12$
- $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{2}=\gamma$

Α) Να βρείτε τους α,β,γ.

Β) Για $\alpha=-6$, $\beta=-4$, $\gamma=-2$ και $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha<x<\gamma$:

i) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $(\alpha\gamma)^{\beta}$ και $(\beta\gamma)^{\alpha}$

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x,\beta)<2$

iii) Να αποδείξετε ότι: $d\left(x^2,-5\beta\right)<16$

iv) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\left||x-\alpha|+\beta\right|-\left|\beta-|x+1|\right|$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

v) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:
$B=|x^2+4x+4|+|4-x^2|-|x^2+8x+12|$

Μονάδες: 7+3+3+4+4+4=25

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $\left(\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{5}{2}\right)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

- $|\alpha^2-\beta^2|+5\alpha^2=-4\alpha-1-2\alpha\beta-\beta^2$

Έστω επίσης $x,y\in\left(\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{5}{2}\right)$ για τους οποίους ισχύουν:

- $|x-3|\le x_0$
- $|y+1|\le x_0$, όπου x_0 το κέντρο του διαστήματος $\left(\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{5}{2}\right)$

A) Να δείξετε ότι ισχύει: $\alpha=-\frac{1}{2}$ και $\beta=\frac{1}{2}$

B) Να αποδείξετε ότι:

i) $-8<-2x+3y+1\le -3$

ii) $\left|\frac{y}{x}+\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}$

Γ) Έστω $\gamma\in\left(\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{5}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι, στον άξονα των πραγματικών αριθμών, το σημείο $A\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+2}\right)$ βρίσκεται πλησιέστερα στο $M(x_0)$ από ό,τι το σημείο $B\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)$.

ii) Να βρείτε την τιμή του γ ώστε να ισχύει: $d\left(\frac{\gamma}{\gamma+1},x_0\right)=3\cdot d\left(\frac{\gamma+1}{\gamma+2},x_0\right)$

Μονάδες: 6+4+6+5+4=25