**ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1 ΕΩΣ 2.2 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ**

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α)** Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Πότε λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$; Πώς ονομάζουμε σε αυτή την περίπτωση το $x_0$ και την τιμή $f(x_0)$;

**Β)** Να αιτιολογήσετε (θεωρώντας γνωστό ότι κάθε γραμμική εξίσωση αντιστοιχεί σε μία μόνο ευθεία και αντιστρόφως) ότι για ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα 2x2 **ένα μόνο** από τα παρακάτω μπορεί να συμβαίνει:

● Το σύστημα έχει μοναδική λύση

● Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

● Το σύστημα είναι αδύνατο

**Γ)** Θεωρούμε τον ισχυρισμό: ≪Δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι άρτια και περιττή≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Δ)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**i)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ με $f(x) = \varphi(x-c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi$ κατά $c$ μονάδες **προς τα αριστερά.**

**ii)** Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $0 \in A$. Αν η $f$ είναι περιττή, τότε θα ισχύει: $f(0) = 0$

**iii)** Για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει: αν η ορίζουσά του ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

**iv)** Το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$ είναι γραμμικό ως προς $x^2$ και $y^2$.

**v)** Κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα ολικό ακρότατο.

**Μονάδες: 3+6+6+5x2=25**

**ΘΕΜΑ 2ο**

**Α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)=1$

**Β)** Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η $g$ είναι άρτια τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

**Γ)** Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

**i)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει: $f\left(x\right)=\sqrt{x^4+1}-x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

**ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ δεν είναι γνησίως μονότονη.

**iii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ και ισχύει: $0<f\left(x\right)\le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**iv)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ είναι αδύνατη.

**Μονάδες: 2+5+3+5+4+6=25**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{57}{26}}+2}$ και $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{31}{26}}+2x}$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}x+\dfrac{\beta}{3}y=1 \\ \dfrac{\alpha}{3}x-\dfrac{\beta}{2}y=-1 \end{cases}$ να έχει λύση το ζεύγος $\left(x,y\right)=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{5}\right)$. Έστω ακόμα η συνάρτηση $\varphi\left(x\right)=x^2-8\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\gamma=f\left(\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)$.

**Α)** Να βρείτε τους $\alpha$ και $\beta$.

**Β)** Για $\alpha=\dfrac{9}{26}$ και $\beta=\dfrac{50}{13}$:

**i)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sigma(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ μετά από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις, από τις οποίες η μία είναι οριζόντια και η άλλη κατακόρυφη. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi$ (δίνεται ότι: $\sqrt{2}\cong 1,4$).

**ii)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και ότι η $f$ είναι άρτια. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ ενώ ισχύει: $\max f(x)=\frac{1}{2}$

**iii)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και ότι η $g$ είναι περιττή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

**iv)** Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$ για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}^*$ .

**Μονάδες: 5+6+5+4+5=25**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=|\alpha|x^3-10$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

**Α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως μονότονη για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

**Β)** Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση $f$ να είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $M(1,-9)$.

**Γ)** Για $\alpha=1$:

**i)** Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases}\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda y}=6\\ \sqrt{\frac{\lambda}{x}}+\sqrt{\frac{\lambda}{y}}=3\end{cases}$ , όπου $\lambda=f\left(\sqrt[3]{3}\right)+10$

**ii)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ έχει με την ευθεία $y=-x$ μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

**iii)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2(3+x)>3(3-x)$ και να βρείτε τη μικρότερη ακέραια λύση της.

**Μονάδες: 5+3+6+5+6=25**