

82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 5 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΑ ΚΕΝΤΡΑ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει **απαραίτητα** να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς δυο (2) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές (12:00-14:00). **Δεν θα επιτρέπεται** σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει **μισή ώρα από την έναρξη της εξέτασης**.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.**
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή διευθυντή του σχολείου και ν' αποσταλούν όπως περιγράφεται παρακάτω:

α) Τα γραπτά των μαθητών μετά το πέρας του διαγωνισμού για τους Νομούς Αττικής, **Δράμας, Ευρυτανίας, Ζακύνθου, Θεσπρωτίας, Κεφαλληνίας, Κυκλάδων, Πρέβεζας, Ρεθύμνου, Φωκίδας, και για τα νησιά του Ν. Δωδεκανήσου εκτός της Ρόδου** θα αποσταλούν στην Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε στην Αθήνα με ημερομηνία αποστολής 5/11/2021.

Παρακαλούμε στο φάκελο να σημειωθούν τα παρακάτω στοιχεία:

Αποστολέας ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΟΝΟΜΑ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ ΑΡΙΘΜΟΣ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΝΑ ΤΑΞΗ	Παραλήπτης ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34, 106 79 ΑΘΗΝΑ Για την επιτροπή διαγωνισμών
--	---

β) Για τους υπόλοιπους νομούς όπου η ΕΜΕ διαθέτει Παράρτημα, τα γραπτά θα παραδοθούν από το εξεταστικό κέντρο σε εκπρόσωπο του Παραρτήματος στις 5/11/2021. Το Παράρτημα της ΕΜΕ θα φροντίσει να συνεργαστεί με τους διευθυντές των σχολείων για την παραλαβή των γραπτών.

7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στις Διευθύνσεις Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
8. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους διευθυντές των σχολείων και όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην οργάνωση των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος

Ιωάννης Π. Εμμανουήλ
Καθηγητής ΕΚΠΑ

Ο Γενικός Γραμματέας

Ιωάννης Τυρλής
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4.

(Σημείωση: $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$).

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α' τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:
Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Ν των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

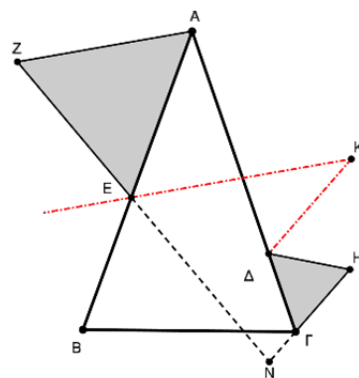
Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($AB = AG$) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B\hat{E}Z}$ και $\widehat{A\hat{D}H}$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\widehat{EK\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Gamma}$

(β) $\widehat{EN\Gamma} = 120^\circ - \widehat{B\hat{A}\Gamma}$



(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

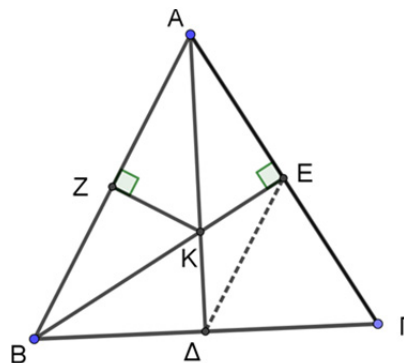
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας \hat{A} , το ύψος BE και η μεσοκάθετη ZK της πλευράς AB περνούν από το ίδιο σημείο K.

(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία \hat{A} του τριγώνου ABΓ.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία AB, να αποδείξετε ότι

$$ΚΔ = ΚΕ = ΚΖ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε στην εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y + \frac{3}{2x - 6y} = \frac{13}{2} \\ (5x - 2y)(x - 3y) + 2 = 6(x - 3y) \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους ακέραιους

$$N = \overline{\alpha 1 \beta} = 100\alpha + 10 + \beta, \quad 0 < \alpha < \beta,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1)$,
στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta + 1$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$. Πάνω στην ευθεία $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta, \quad 0 < \alpha < \gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha - 1)^2 + \alpha^2 + \dots + \gamma^2 + (\gamma + 1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > B\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔB τέμνει την πλευρά AB στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3 \cdot B\Gamma$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες
Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$

$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(2f(x) + y) = f(f(y) + x) + x. (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z) = \alpha$ και ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση (*).

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R . Θεωρούμε τα μέσα M, K, Λ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$, αντίστοιχα, καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA), C_K(K, KB), C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία M, K, Λ και ακτίνες $MA, KB, \Lambda\Gamma$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, E, Z , αντίστοιχα. Αν T, P, Σ είναι οι ορθές προβολές των κορυφών A, B, Γ , αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Delta T, EP$ και $Z\Sigma$ συντρέχουν.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!