

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1 ΕΩΣ 1.5 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

EMAIL: left-eris82@hotmail.com FACEBOOK: Lefteris Papanikolaou

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$. Πότε λέμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ομόρροπα;

Β) Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα ενός καρτεσιανού επιπέδου τα οποία δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = -\vec{\alpha}$

ii) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \geq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

iii) Για δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 < \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$

iv) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} \right) < \frac{\pi}{2}$

v) Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα της αρχής μείον τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος.

Μονάδες: 4+7+4+5×2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με N το μέσο της AB και M σημείο της ευθείας $A\Gamma$. Θέτουμε επίσης: $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{M\Gamma} = \lambda \vec{\beta}$

ii) $\overrightarrow{\Gamma N} = \frac{\vec{\gamma} - 2\vec{\beta}}{2}$

B) Να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα \vec{u} και \vec{v} για

τα οποία ισχύει:
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \frac{\vec{\beta}}{2} + \frac{\vec{\gamma}}{4} \\ \vec{u} - \vec{v} = \frac{5\vec{\gamma}}{4} \end{cases}$$

Γ) Για $\overrightarrow{AK} = \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{\beta} + \frac{3}{4}\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{v} = \frac{1}{4}\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\gamma}$:

i) Να δείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $\overrightarrow{B\Delta} = \frac{1}{4}\vec{\gamma}$

ii) Να δείξετε ότι αν $\lambda = \frac{3}{8}$ τότε τα σημεία M, K, Δ είναι συνευθειακά.

Δ) Να αποδείξετε ότι αν το σημείο M είναι η προβολή του B στην $A\Gamma$ τότε ισχύει:

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{N\Gamma} = 0$$

Μονάδες: 3+3+5+5+5+4=25

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-2,3)$, $\Delta(3,-4)$ και κέντρο

$K(x_K, y_K)$ για το οποίο ισχύει:
$$\begin{cases} x_K \cdot y_K = 1 \\ x_K + y_K = \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ όπου } x_K > y_K$$

A) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Στα επόμενα ερωτήματα, να θεωρήσετε ότι ισχύει $B(1,5)$ και $\Gamma(6,-2)$:

B) Να αποδείξετε ότι:

i) Το $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii) Η ευθεία $A\Delta$ δε διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

Γ) Έστω Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Delta$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Θ και να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = 2x$.

Δ) Έστω Z το σημείο της ευθείας $y = 2x$ που ισαπέχει από τα σημεία A και Δ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Z και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Z και Θ (όπου Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Delta$) είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$.

Μονάδες: 7+4+4+5+5=25

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\kappa + 3, \kappa^2 + 2\kappa - 3), \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, -5).$$

A) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε:

i) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$

ii) $\lambda_{\vec{\alpha}} = 2$

B) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\left(\frac{1}{5}\vec{\beta}\right)^2 \cdot (1 - \vec{\alpha}^2) \leq 1$

\Gamma) Για $\kappa = 3$:

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 12$

ii) Να υπολογίσετε το $\text{syn}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$.

iii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Δ) Για $\kappa = 3$, έστω $\overline{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overline{OB} = \vec{\beta}$. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 - 18x + 72$ και $y^2 - 7y - 60$ και στη συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2 - 18x + 72 + y^2 - 7y - 60 = 0$

Μονάδες: 3+3+4+3+3+4+5=25

