

## ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1 ΕΩΣ 2.2 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A)** Έστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ; Πώς ονομάζουμε σε αυτή την περίπτωση το  $x_0$  και την τιμή  $f(x_0)$ ;

**B)** Να αιτιολογήσετε (θεωρώντας γνωστό ότι κάθε γραμμική εξίσωση αντιστοιχεί σε μία μόνο ευθεία και αντιστρόφως) ότι για ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  **ένα μόνο** από τα παρακάτω μπορεί να συμβαίνει:

- Το σύστημα έχει μοναδική λύση
- Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων
- Το σύστημα είναι αδύνατο

**Γ)** Θεωρούμε τον ισχυρισμό: «Δεν υπάρχει συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία να είναι άρτια και περιττή». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Δ)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**i)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = \varphi(x - c)$ , όπου  $c > 0$ , προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες **προς τα αριστερά**.

**ii)** Έστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $0 \in A$ . Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε θα ισχύει:  $f(0) = 0$

**iii)** Για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  ισχύει: αν η ορίζουσά του ισούται με μηδέν, τότε το σύστημα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

**iv)** Το σύστημα 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$$
 είναι γραμμικό ως προς  $x^2$  και  $y^2$ .

**v)** Κάθε συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τουλάχιστον ένα ολικό ακρότατο.

**Μονάδες: 3+6+6+5x2=25**

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\sqrt{x^4+1}-x^2)(\sqrt{x^4+1}+x^2)=1$

**B)** Έστω  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η  $g$  είναι άρτια τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

**Γ)** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

**i)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  είναι το σύνολο  $\mathbb{R}$  και ότι ισχύει:  $f(x) = \sqrt{x^4+1} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη.

**iii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0 = 0$  και ισχύει:  $0 < f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**iv)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$  είναι αδύνατη.

**Μονάδες: 2+5+3+5+4+6=25**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{57}{26}} + 2}$  και  $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha+\beta-\frac{31}{26}} + 2x}$ , όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τέτοιοι ώστε το σύστημα  $\begin{cases} \frac{\alpha}{2}x + \frac{\beta}{3}y = 1 \\ \frac{\alpha}{3}x - \frac{\beta}{2}y = -1 \end{cases}$  να έχει λύση το ζεύγος

$(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{5}\right)$ . Έστω ακόμα η συνάρτηση  $\varphi(x) = x^2 - 8\gamma x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , όπου

$\gamma = f\left(\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right)$ .

**A)** Να βρείτε τους  $\alpha$  και  $\beta$ .

**B)** Για  $\alpha = \frac{9}{26}$  και  $\beta = \frac{50}{13}$ :

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\varphi$  προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\sigma(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  μετά από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις, από τις οποίες η μία είναι οριζόντια και η άλλη κατακόρυφη. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $\varphi$  (για τη σχεδίαση και μόνο, δίνεται ότι:  $\sqrt{2} \cong 1,4$ )

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  είναι το σύνολο  $\mathbb{R}$  και ότι η  $f$  είναι άρτια. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  ενώ ισχύει:  $\max f(x) = \frac{1}{2}$

iii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  είναι το σύνολο  $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  και ότι η  $g$  είναι περιττή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$

iv) Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Μονάδες: 5+6+5+4+5=25**

#### **ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \alpha x^3 - 10$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

B) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, -9)$ .

Γ) Για  $\alpha = 1$ :

i) Να λύσετε το σύστημα 
$$\begin{cases} \sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda y} = 6 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} + \sqrt{\frac{\lambda}{y}} = 3 \end{cases}, \text{ όπου } \lambda = f(\sqrt[3]{3}) + 10$$

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει με την ευθεία  $y = -x$  μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

iii) Να λύσετε την ανίσωση  $x^2(3+x) > 3(3-x)$  και να βρείτε τη μικρότερη ακέραια λύση της.

**Μονάδες: 5+3+6+5+6=25**

