ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 3.1 ΕΩΣ 3.16 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Β) Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: ≪Δύο οποιαδήποτε ορθογώνια τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα≫. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε το κάθετο προς την ε τμήμα ΑΒ και δύο πλάγια προς την ε τμήματα ΑΓ και ΑΔ. Θα ισχύει ότι:

$A\Gamma < AB$ ή $A\Delta < AB$

ii) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.

iii) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι κέντρο κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα άκρα του τμήματος.

iv) Κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο είναι σκαληνό.

v) Σε οποιοδήποτε τρίγωνο, το διπλάσιο κάθε πλευράς του είναι μικρότερο από την περίμετρό του.

Μονάδες: 5+6+4+5×2=25

ΘΕΜΑ 2ο(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ εκτός του Δ ερωτήματος)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα ώστε: $B\Delta = \Gamma E$.

Α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.

Β) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\angle M\Delta E = \angle ME\Delta$

Γ) Έστω Ζ το σημείο τομής των ευθειών ΑΜ και ΔΕ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΖ είναι η μεσοκάθετος του ΔΕ.

Δ) Θεωρούμε επίσης σημείο Η της πλευράς ΑΓ και σημείο Θ στην προέκταση της ΒΑ ώστε: $AH = A\Theta$. Αν Κ το μέσο του ΗΘ, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\angle MAK = 90^o$.

Μονάδες: 7+5+6+7=25

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = \beta$ και $B\Gamma = \alpha$. Πάνω σε μία ευθεία ε παίρνουμε τμήμα $K\Lambda = \alpha$ και γράφουμε τους κύκλους (K,β) και (Λ,β).

Α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (K,β) και (Λ,β) τέμνονται στα σημεία Δ και Ε.

Β) Θεωρούμε μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (K,β), (Λ,β) και έστω Μ, Ν αντίστοιχα τα σημεία επαφής της με τους παραπάνω κύκλους.

i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΜΝ και ΛΝΜ είναι ίσα.

ii) Έστω Θ και Η τα σημεία τομής των ΜΛ και ΚΝ με τους κύκλους (Λ,β) και (K,β) αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $M\Theta = NH$ και $K\Theta = \Lambda H$

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών ΚΝ και ΜΛ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΔΕ.

Μονάδες: 4+6+4+6+5=25

ΘΕΜΑ 4ο(ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ εκτός του Γ ερωτήματος)

Έστω μία ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής. Για τα Α και Β θεωρούμε ότι βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ε και είναι τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην ε. Έστω ακόμα A' το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία ε.

Α) Αν οι ευθείες BA' και ε τέμνονται στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i) Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $\angle AOA'$.

ii) Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.

Β) Έστω Κ ένα σημείο της ευθείας ε διαφορετικό από το Ο. Να αποδείξετε ότι:

i) $KA = KA'$

ii) $KA + KB > OA + OB$

Γ) Αν επιπλέον η μεσοκάθετος του τμήματος ΚΒ περνάει από το σημείο Ο και τα σημεία Μ και Ν είναι οι προβολές των Β και Κ στις ευθείες ε και BA' αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει: $BM = KN$. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση του σημείου Κ ως προς την ευθεία BA')

Μονάδες: 4+6+3+6+6=25