

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 3.1 ΕΩΣ 4.2 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ/ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

A1) Ποια είναι η μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού;

A2) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Να αναφέρετε τους τύπους του Vieta.

B) Να αποδείξετε ότι αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, όπου $a \neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ τότε είναι ομόσημο του a όταν το x βρίσκεται εκτός των ριζών και ετερόσημο του a όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών.

Γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Η ανίσωση $0x > \beta^2$ είναι αδύνατη για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $|x| = x$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αλλά δεν είναι ταυτότητα.

ii) Η εξίσωση $x^v = a$ με $a > 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις για κάθε v θετικό ακέραιο.

iii) Αν ένα τριώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, τότε για τη διακρίνουσά του Δ ισχύει $\Delta \geq 0$.

iv) Για οποιουδήποτε $a, \gamma \in \mathbb{R}$ με $a\gamma < 0$, η εξίσωση $\gamma x^2 + bx + a = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

v) Η εξίσωση $x^2 = x + 6$ έχει δύο λύσεις, τους αριθμούς -2 και -3 .

Μονάδες: 2+3+6+4+5×2=25

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε το τριώνυμο $P(x) = x^2 + 5x + \kappa^2$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ και τις ανισώσεις

$x + \frac{x-1}{4} \geq \frac{1+2x}{2}$ (1) και $\frac{8x+2}{6} < \frac{7}{3} + x$ (2). Έστω επίσης η εξίσωση

$(x - \alpha)^\beta = -64(x - \alpha)^{\beta - \alpha}$ (3) όπου α η μικρότερη ακέραια λύση της ανίσωσης (1) και β η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανίσωσης (2).

A) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς α και β .

Για $\alpha = 3$ και $\beta = 5$:

B) Να λύσετε την εξίσωση (3).

Γ) Έστω $x_1 = 3$ και $x_2 = -1$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης (3)

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x_1 δεν μπορεί να είναι και ρίζα του τριωνύμου $P(x)$.

ii) Να βρείτε όλους τους $\kappa \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ο αριθμός x_2 είναι ρίζα του τριωνύμου $P(x)$.

iii) Για $\kappa = \pm 2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\frac{Q(x)}{P(x)}$ όπου

$Q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες: 7+5+4+4+5=25

ΘΕΜΑ 3ο

A) Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 - |x - 1| - 2 = 0$ και τη (διπλή) ανίσωση $1 < |x - 1| < 3$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης.

B) Θεωρούμε την εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2\alpha^2x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$ (1) όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ παράμετροι.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για οποιουδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

ii) Να αποδείξετε ότι για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 \neq 2$.

Έστω $\beta = \pm 1$:

iii) Να λύσετε την εξίσωση (1) και να αποδείξετε ότι οι ρίζες της είναι $x_1 = -1$ και

$$x_2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

iv) Να βρείτε όλους τους $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τους οποίους ισχύει: $x_1x_2 = 0$

ν) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x_1 και x_2 δεν μπορεί να είναι ούτε αντίθετοι ούτε αντίστροφοι.

Μονάδες: 8+3+4+3+3+4=25

ΘΕΜΑ 4ο

A) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \gamma x + \gamma = 0$ (1) όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

i) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\gamma \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $\alpha + \beta = \alpha\beta = \gamma$, όπου $\gamma \in (0, 4)$.

iii) Θεωρώντας γνωστό ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ζεύγος διαδοχικών ακέραιων αριθμών των οποίων το άθροισμα να ισούται με το γινόμενο.

B) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

i) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε όλους τους $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η ανίσωση

$$\left[2 \cdot \left(\frac{1013}{2022} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1013}{2022} + 1 \right] (x^2 + 4\lambda x + 3\lambda) \leq 0 \text{ αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες: 6+6+5+3+5=25

