Δευτέρα, 11. Ιουλίου 2022

Πρόβλημα 1. Η τραπεζα του Όσλο εκδίδει δύο τύπους κερμάτων: από αλουμίνιο (συμβολίζεται με A) και από χαλκό (συμβολίζεται με B). Η Μαριάννα έχει n κέρματα από αλουμινίο και n κέρματα από χαλκό, τοποθετημένα σε μία γραμμή με κάποια τυχαία αρχική διάταξη. Μία *αλυσίδα* είναι οποιαδήποτε υποακολουθία διαδοχικών κερμάτων του ιδίου τύπου. Όταν δοθεί ένας σταθερός θετικός ακέραιος $k \leqslant 2n$, η Μαριάννα εκτελεί επαναληπτικά την ακόλουθη πράξη: εντοπίζει τη μακρύτερη αλυσίδα που περιέχει το κέρμα που βρίσκεται στην $k-$θέση της γραμμής από αριστερά και μετακινεί όλα τα κέρματα αυτής της αλυσίδας στο αριστερό άκρο της γραμμής. Για παράδειγμα, αν $n = 4$ και $k = 4$, η διαδιακασία που αρχίζει από τη διάταξη $AABBBABA$ θα είναι

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Βρείτε όλα τα ζεύγη (n, k) με $1 \leqslant k \leqslant 2n$, που είναι τέτοια ώστε για κάθε αρχική διάταξη, σε κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, τα πιο αριστερά n κέρματα της γραμμής να είναι όλα του ιδίου τύπου.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{R}^+$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ που είναι τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$, υπάρχει ακριβώς ένα $y \in \mathbb{R}^+$, που ικανοποιεί τη σχέση

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Πρόβλημα 3. Έστω k ένας θετικός ακέραιος και έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με στοιχεία περιττούς πρώτους θετικούς ακέραιους. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένας τρόπος (εκτός από περιστροφές και συμμετρίες) να τοποθετήσουμε τα στοιχεία του συνόλου S πάνω σε ένα κύκλο έτσι ώστε το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο γειτονικών στοιχείων να είναι της μορφής $x^2 + x + k$, για κάποιο θετικό ακέραιο x.

Language: Greek

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τρίτη, 12. Ιουλίου 2022

Πρόβλημα 4. Έστω $ABCDE$ ένα κυρτό πεντάγωνο τέτοιο ώστε $BC = DE$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο T στο εσωτερικό του $ABCDE$ με $TB = TD$, $TC = TE$ και $\angle ABT = \angle TEA$. Η ευθεία AB τέμνει τις ευθείες CD και CT στα σημεία P και Q, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία P, B, A, Q βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη διάταξη . Έστω ότι η ευθεία AE τέμνει τις ευθείες CD και DT στα σημεία R και S, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία R, E, A, S βρίσκονται πάνω στην ευθεία τους με αυτή τη διάταξη. Να αποδείξετε ότι τα σημεία P, S, Q, R ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλες τις τριάδες (a, b, p) θετικών ακεραίων με p πρώτο αριθμό και

$$a^p = b! + p.$$

Πρόβλημα 6. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Ένα *Σκανδιναβικό τετράγωνο* είναι ένας $n \times n$ πίνακας που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι το n^2 έτσι ώστε κάθε κελί να περιέχει ακριβώς ένα αριθμό. Δύο διαφορετικά κελιά θεωρούνται γειτονικά, αν έχουν μία κοινή πλευρά. Κάθε κελί το οποίο είναι γειτονικό μόνο με κελιά που περιέχουν μεγαλύτερους αριθμούς ονομάζεται *κοιλάδα*. Ένα *ανηφορικό μονοπάτι* είναι μία ακολουθία από ένα ή περισσότερα κελιά έτσι ώστε:

(i) το πρώτο κελί της ακολουθίας είναι μία κοιλάδα,

(ii) κάθε επόμενο κελί της ακολουθίας είναι γειτονικό με το προηγούμενο κελί, και

(iii) οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κελιά της ακολουθίας είναι σε αύξουσα σειρά.

Βρείτε, συναρτήσει του n, τον ελάχιστο δυνατό αριθμό ανηφορικών μονοπατιών σε ένα Σκανδιναβικό τετράγωνο.