

**83<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 11 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΑ ΚΕΝΤΡΑ**

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους/στις μαθητές/τριες.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές/τριες θα πρέπει **απαραίτητα** να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές/τριες.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς δυο (2) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές (12:00-14:00). **Δεν θα επιτρέπεται** σε κανένα μαθητή/τρια ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει **μισή ώρα από την έναρξη της εξέτασης**.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες τους. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή/τρια, αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του/της είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.**
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή διευθυντή/ντριας του σχολείου και ν' αποσταλούν όπως περιγράφεται παρακάτω:

α) Τα γραπτά των μαθητών μετά το πέρας του διαγωνισμού για τους Νομούς **Αττικής, Δράμας, Ευρυτανίας, Ζακύνθου, Θεσπρωτίας, Ιωαννίνων, Κεφαλληνίας, Κυκλάδων, Πρέβεζας, Ρεθύμνου, Φωκίδας, και για τα νησιά του Ν. Δωδεκανήσου εκτός της Ρόδου** θα αποσταλούν στην Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε στην Αθήνα με ημερομηνία αποστολής 11/11/2022.

Ειδικά για τα Σχολεία του Νομού Αττικής, **αν αυτό είναι εφικτό**, μπορούν τα γραπτά να παραδοθούν απ' ευθείας στα γραφεία της ΕΜΕ (Πανεπιστημίου 34, Αθήνα) που θα είναι ανοικτά από **8.00 μέχρι και 20.30 την ημέρα του διαγωνισμού**. Αντίστοιχη παράδοση μπορεί να γίνει και στο γραφείο του Παραρτήματος της **ΕΜΕ στη Θεσσαλονίκη (μέχρι 18.00)** (Προξ. Κορομηλά 51) για τα γραπτά του Νομού Θεσσαλονίκης.

Παρακαλούμε στο φάκελο να σημειωθούν τα παρακάτω στοιχεία:

Αποστολέας ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΟΝΟΜΑ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ ΑΡΙΘΜΟΣ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΝΑ ΤΑΞΗ	Παραλήπτης ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34, 106 79 ΑΘΗΝΑ Για την επιτροπή διαγωνισμών
--	---

β) Για τους υπόλοιπους νομούς όπου η ΕΜΕ διαθέτει Παράρτημα, τα γραπτά θα παραδοθούν από το εξεταστικό κέντρο σε εκπρόσωπο του Παραρτήματος στις 11/11/2022. Το Παράρτημα της ΕΜΕ θα φροντίσει να συνεργαστεί με τους/τις διευθυντές/ντριες των σχολείων για την παραλαβή των γραπτών.

7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στις Διευθύνσεις Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
8. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους διευθυντές/ντριες των σχολείων και όλους τους/τις συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην οργάνωση των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο  
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος  
Ιωάννης Π. Εμμανουήλ  
Καθηγητής ΕΚΠΑ

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής  
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**  
**11 Νοεμβρίου 2022**

**Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = 1.$$

**Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)**

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και ένα σημείο  $\Gamma$  στο εσωτερικό του, έτσι ώστε  $A\Gamma > AB/2$ . Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία  $AB$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta, E$  έτσι ώστε τα τρίγωνα  $\Delta A\Gamma$  και  $A B E$  να είναι ισοσκελή με  $\Delta A = \Delta\Gamma > E A = E B$  και  $\Delta A \parallel E\Gamma$ . Η παράλληλη από το σημείο  $\Delta$  προς την ευθεία  $E A$  τέμνει την ευθεία  $E\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α)  $\Gamma\Delta = E Z$  και  $\Delta Z = B E$   
(β)  $B Z \parallel \Delta\Gamma$ .

**Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)**

Έστω  $n > 2$  ένας περιττός ακέραιος. Έστω  $k$  ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του  $n + 2$ . Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός  $\frac{n}{k}$  είναι ακέραιος, τότε ο  $n$  είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**  
**11 Νοεμβρίου 2022**

**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq 0, \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{9}, xyz = 27 \right\}$$

**Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)**

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1) - 2(x-1)\sqrt{y-1} - 2(y-1)\sqrt{x-1} + x + y - 2 \leq 0.$$

**Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε  $\widehat{ΑΔΒ} = 70^\circ$  και  $\widehat{ΑΔΓ} = 80^\circ$ .

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας ΒΔΔ.

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**  
**11 Νοεμβρίου 2022**

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)**

Έστω  $a, b$  μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $a + b = 2$ . Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = 8(a^3 + b^3) - 3(a^4 + b^4).$$

**Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)**

Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ . Έστω  $\Delta$  σημείο στη διχοτόμο της γωνίας  $B$  τέτοιο ώστε  $M\Delta = MB$  και έστω  $E$  σημείο στη διχοτόμο της γωνίας  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $ME = M\Gamma$ . Έστω  $I$  το σημείο τομής των διχοτόμων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ , έστω  $K$  το σημείο τομής των ευθειών  $AB$  και  $E\Delta$ , και έστω  $N$  το σημείο τομής των ευθειών  $A\Gamma$  και  $E\Delta$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, K, I, N$  είναι ομοκυκλικά.

**Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)**

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών  $f(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$  και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(6n+7) = 6f(n)+7 \quad \text{και} \quad f(7n-1) = 7f(n)-1,$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$ . Να προσδιορίσετε την τιμή  $f(2029)$ .

*Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*