



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου.

A2. Σελίδα 155 σχολικό βιβλίο.

A3. Σελίδα 216 σχολικό βιβλίο .

A4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα τα x όπου $x \in A_g \cap A_h$ και $h(x) \neq 0$

Δηλαδή $x \in [1, +\infty)$ και $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $A_f = (1, +\infty)$ και $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$

Άρα $\boxed{f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1}$ (1)

Η συνάρτηση $r(x)$ ορίζεται όταν $x \in A_g \cap A_h$ δηλαδή όταν $x \in [1, +\infty)$

Άρα $A_r = [1, +\infty)$ και $r(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_f = (1, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f = (1, +\infty)$ επομένως και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_f = (1, +\infty)$ άρα

$$f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty) \text{ διότι}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \frac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

Άρα $A_{f^{-1}} = (1, +\infty)$, για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = 1 + y \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\text{Άρα } \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1} \quad (2)$$

Από (1), (2) ισχύει $f = f^{-1}$

Ενναλλακτικά : Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ άρα

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\text{Πρέπει } x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

B3. Η $r(x) = \frac{x^2-1}{x}$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα αναζητήσουμε ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Άρ η ευθεία $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

B4. Η εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ ορίζεται για $x \in (1, +\infty)$

Ισοδύναμα έχουμε:

$$x^2 = 1 + 4 \left(x - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις τις $x = 4, x = 1, x = -1$ από τις οποίες δεκτές είναι η $x = 4$ αφού πρέπει $x > 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow e^\lambda = 1 + \lambda \text{ η οποία ισχύει μόνο για } \lambda = 0$$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει για $x = 1$

Θέτουμε $\ln x = u$ όπου $u \in \mathbb{R}$ άρα $u \leq e^u - 1 \Leftrightarrow e^u \geq u + 1$ και η ισότητα ισχύει όταν $e^u = 1 \Leftrightarrow u = 0$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \text{ Για } \lambda = 0 \text{ } f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Αν $x \in (0, 2)$: $f'(x) = -2 < 0$ και επειδή η f συνεχής στο $[0, 2]$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Αν $x \in (2, +\infty)$: $f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2) < 0$ και επειδή η f συνεχής στο $[2, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A_f = [0, +\infty)$ και στη θέση $x = 0$ έχει ελάχιστο το $f(0) = 5$

Γ3. (i) Η είναι συνεχής στο $[0, 3]$.

Στο $x_0 = 2$ η f "αλλάζει" τύπο και είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0, 3]$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = 0$ Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ άρα δεν ικανοποιεί τη 2^η προϋπόθεση του Θ.Μ.Τ που ζητάει να είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$

(ii) Ισχύει $f(0) = 5$ και $f(3) = 0$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία E και Δ έχει κλίση $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{f(3) - f(5)}{3 - 5} = -\frac{5}{3}$

Θα λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = -\frac{5}{3}$ με $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

Αν $x \in (0, 2)$: $f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$ αδύνατη

Αν $x \in (2, +\infty)$: $f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$ με $\frac{17}{6} \in (2, 3)$

Άρα στο σημείο $M\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στη ευθεία

$\Gamma\Delta$

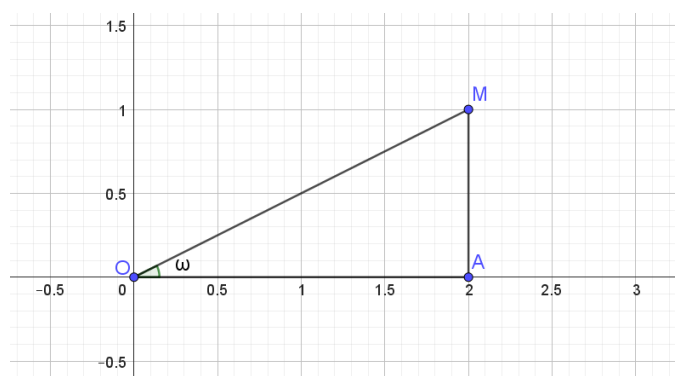
Γ4. Το σημείο M ξεκινάει από το σημείο $A(2, 0)$ και συναντάει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $(2, f(2))$ δηλαδή στο $(2, 1)$

Άρα έχουμε το τρίγωνο AOM όπου $A(2, 0)$, $M(2, 1)$ και $O(0, 0)$

Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{OA} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{2} AM$

Άρα $\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{1}{2} y'(t)$, παραγωγίζοντας

ως προς t έχουμε



$$\frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t) \Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t) \cdot \sin^2 \omega(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε $\omega'(t_0) = \frac{1}{2} y'(t_0) \cdot \sin^2 \omega(t_0)$ (A)

$$\text{Ισχύει } y'(t_0) = \frac{1}{2} \text{ και } \text{συν}\omega(t_0) = \frac{OA}{AM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 \Leftrightarrow OM^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{5}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (A) έχουμε $\omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad/sec.}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \alpha, x \in (0, +\infty)$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$. Στην θέση $x = e$ έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e} + \alpha$

Από το σύνολο τιμών της f που είναι δεδομένο από τη εκφώνηση πρέπει

$$\frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e} + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2. Η f συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + 1 = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2(\ln 1 - \ln 2) + \ln e = -2\ln 2 + \ln e = \ln e - \ln 4 = \ln\left(\frac{e}{4}\right) < 0$

- $f(1) = 1 > 0$

Δηλαδή $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, το x_0 είναι μοναδικό διότι στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Δ3. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$\Delta_1 = (0, e] \text{ και } \Delta_2 = [e, +\infty)$$

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e)\right) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right) \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} + 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 = -\infty$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right) = \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right] \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{\text{D.L.H } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 1 = 1$$

$$\text{Ο αριθμός } 2 \in (0, e] \text{ και } f(2) = \frac{\ln 2}{2} + 1$$

$$\text{Ο αριθμός } 4 \in [e, +\infty) \text{ και } f(4) = \frac{\ln 2}{2} + 1$$

Δηλαδή οι τιμές $f(2)$ και $f(4)$ είναι ίσες

Το $\frac{\ln 2}{2} + 1 \in f(\Delta_1)$ και το $\frac{\ln 2}{2} + 1 \in f(\Delta_2)$ και λόγω μονοτονίας σε κάθε διάστημα

υπάρχει μόνο ένα x σε κάθε διάστημα. Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\ln 2}{2} + 1$ έχει δύο

ακριβώς λύσεις τις $x = 2$ και $x = 4$

(ii)

$$2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{\ln 2}{2} + 1$$

$$\text{Αν } x \in (0, e] \quad f(x) \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x \geq 2 \text{ άρα } 2 \leq x \leq e$$

$$\text{Αν } x \in [e, +\infty) \quad f(x) \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x \leq 4 \text{ άρα } e \leq x \leq 4$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in [2, 4]$

Εναλλακτικά : Η εξίσωση $f(x) = \frac{\ln 2}{2} + 1$ έχει 2 ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 άρα η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \frac{\ln 2}{2} - 1$ θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[2, 4]$ με εξαίρεση το 2 και το 4 όπου κάνει μηδέν .

$h(3) = \frac{\ln 3}{3} + 1 - \frac{\ln 2}{2} - 1 = \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{6} = \frac{\ln 9 - \ln 8}{6} > 0$ και λόγω διατήρησης προσήμου ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$ οπότε $f(x) \geq \frac{\ln 2}{2} - 1$ όταν $x \in [2, 4]$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^{2x}} \right| e^x dx$

Θέτουμε $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

Για $x = -\ln 2$ έχουμε $u = \frac{1}{2}$ ενώ για $x = 0$ έχουμε $u = 1$

Άρα $E = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

Η f μηδενίζεται στο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ και στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα αν $\frac{1}{2} < x < x_0$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x) < 0$

Άρα αν $x_0 < x < 1$ τότε λόγω του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x) > 0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(x) \cdot f'(x) dx + \int_{x_0}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \left[\frac{-f^2(x)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_{x_0}^1 = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right) + f^2(1)}{2}$$

Άρα $E = \frac{\ln^2\left(\frac{e}{4}\right) + 1}{2}$, αφού ισχύει $f(x_0) = 0$