**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
# 17 Ιανουαρίου 2026

## Ενδεικτικές λύσεις

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$\mathrm{A} = [(-3)^3 + 27 - (-5)^3 + 10^2] \cdot (3^2 - 2^2),$$

$$\mathrm{B} = \frac{9 \cdot (-5^3 + 10^2)^4}{(2^3 - 3)^2},$$

και να γράψετε τον αριθμό $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ ως δύναμη με βάση το 5.

**Λύση**

$$\mathrm{A} = [(-3)^3 + 27 - (-5)^3 + 10^2] \cdot (3^2 - 2^2) = (-27 + 27 - (-125) + 100) \cdot (9 - 4)$$

$$= 225 \cdot 5 = 9 \cdot 25 \cdot 5 = 9 \cdot 5^3,$$

$$\mathrm{B} = \frac{9 \cdot (-5^3 + 10^2)^4}{(2^3 - 3)^2} = \frac{9 \cdot (-125 + 100)^4}{(8 - 3)^2} = \frac{9 \cdot (-25)^4}{5^2} = \frac{9 \cdot 25^4}{5^2}$$

$$= \frac{9 \cdot (5^2)^4}{5^2} = \frac{9 \cdot 5^8}{5^2} = 9 \cdot 5^6.$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{9 \cdot 5^3}{9 \cdot 5^6} = 5^{-3}.$$

**Πρόβλημα 2**

Ο θετικός ακέραιος $\alpha$ είναι τέτοιος ώστε: $1 \leq \alpha \leq 40$. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $\alpha$ για τις οποίες το άθροισμα

$$ΜΚΔ\{\alpha, 20\} + ΜΚΔ\{\alpha, 40\}$$

**(1)** λαμβάνει τη μικρότερη δυνατή τιμή του,

**(2)** λαμβάνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του.

**Σημείωση.**

Με $ΜΚΔ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων* $\alpha, \beta$.

**Λύση**

**(1)** Η μικρότερη δυνατή τιμή του αθροίσματος είναι $1 + 1 = 2$ και αυτή συμβαίνει όταν $ΜΚΔ\{\alpha, 20\} = ΜΚΔ\{\alpha, 40\} = 1$, δηλαδή όταν ο θετικός ακέραιος $\alpha$, με $1 \leq \alpha \leq 40$, είναι σχετικά πρώτος προς τους αριθμούς 20 και 40, δηλαδή όταν

$$\alpha \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}.$$

**(2)** Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αθροίσματος είναι $20 + 40 = 60$ και αυτή συμβαίνει όταν ο θετικός ακέραιος $\alpha$, με $1 \leq \alpha \leq 40$, είναι τέτοιος ώστε $ΜΚΔ\{\alpha, 20\} = 20$ και $ΜΚΔ\{\alpha, 40\} = 40 \Leftrightarrow \alpha = 40$.

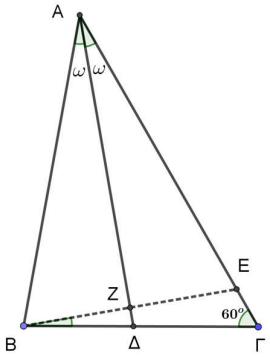
**Πρόβλημα 3**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{\Gamma} = 60^o$. Το σημείο Δ της πλευράς ΒΓ είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A} = 2\omega$ και $AB = AΔ$. Για το σημείο Ε της πλευράς ΑΓ ισχύει ότι: $AE = AB$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Ζ.

**(α)** Να αποδείξετε ότι: $BZ = ZE$.

**(β)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\Gamma\hat{B}E$.

***Σημείωση.*** *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο γραπτό σας.*



Σχήμα 1

**Λύση**

**(α)** Επειδή το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι και διάμεσος, οπότε $BZ = ZE$.

**(β)** Επειδή $AB = AΔ$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B} = A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Όμως η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o + \omega. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $\hat{B} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o + \omega$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow 2\omega + \omega + 60^o + 60^o = 180^o \Rightarrow 3\omega = 60^0 \Rightarrow \omega = 20^0$$

Άρα είναι: $\hat{A} = 2\omega = 2 \cdot 20^o = 40^o$ και $\hat{B} = 60^o + \omega = 60^o + 20^o = 80^o$.

Επειδή $AE = AB$ το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = \frac{180^o - \hat{A}}{2} = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o.$$

Στο τρίγωνο ΒΕΓ η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εξωτερική, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή έχουμε:

$$A\hat{E}B = \Gamma\hat{B}E + \hat{\Gamma} \Rightarrow 70^o = \Gamma\hat{B}E + 60^0 \Rightarrow \Gamma\hat{B}E = 70^o - 60^0 = 10^0.$$

**Πρόβλημα 4**

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma \qquad \text{και} \qquad B = \overline{\beta\gamma} = 10\beta + \gamma,$$

με $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma$ ψηφία. Αν ισχύει $A - 3B = 542$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

**Λύση**

$$A - 3B = 542 \Leftrightarrow 100\alpha + 10\beta + \gamma - 3(10\beta + \gamma) = 542$$
$$\Leftrightarrow 100\alpha = 20\beta + 2\gamma + 542 \Leftrightarrow 100\alpha = 2B + 542.$$

Επειδή τα $\beta \neq 0$ και $\gamma$ είναι ψηφία έπεται ότι $20 \leq 20B \leq 198$, οπότε

$$562 \leq 100\alpha = 2B + 42 \leq 740 \Leftrightarrow \alpha \in \{6, 7\}.$$

Αν $\alpha = 6$, τότε:

$$2B = 58 \Rightarrow B = \overline{\beta\gamma} = 29 \Rightarrow A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 629.$$

Αν $\alpha = 7$, τότε:

$$2B = 158 \Rightarrow B = \overline{\beta\gamma} = 79 \Rightarrow A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 779.$$

## Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν $a + 4b = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = (3a + 12b)^3 - (5a + 20b)^2 + \left[15 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}\right] : \left(-\frac{5}{2}\right)^{-4}$$

και να τη γράψετε ως δύναμη με βάση το 5.

**Λύση.** Η παράσταση Α γράφεται:

$$\mathrm{A} = (3a + 12b)^3 - (5a + 20b)^2 + \left[15 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}\right] : \left(-\frac{5}{2}\right)^{-4}$$

$$= (3(a + 4b))^3 - (5(a + 4b))^2 + \left[15 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{2}\right] : \left(-\frac{2}{5}\right)^{4}$$

$$= 27(a + 4b)^3 - 25(a + 4b)^2 + \left(15 \cdot \frac{(2^2)^2}{5^2}\right) : \frac{2^4}{5^4}$$

$$= 27 \cdot 5^3 - 25 \cdot 5^2 + \frac{15 \cdot 2^4}{5^2} \cdot \frac{5^4}{2^4} = 27 \cdot 5^3 - 25 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5^2$$

$$= 27 \cdot 5^3 - 10 \cdot 5^2 = 27 \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^3$$

$$= 5^3 \cdot (27 - 2) = 5^3 \cdot 25 = 5^3 \cdot 5^2 = 5^5.$$

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του θετικού ακέραιου $\nu$ για την οποία ο αριθμός $\mathrm{A} = 2178 \cdot \nu$ ισούται με το τετράγωνο θετικού ακέραιου και ο αριθμός $\mathrm{B} = 810 \cdot \nu$ ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου.

**Λύση**

Γράφουμε τους αριθμούς 2178 και 810 ως γινόμενα πρώτων παραγόντων. Έχουμε:

$$2178 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \quad \text{και} \quad 810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2178 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$ γίνεται τέλειο τετράγωνο ακέραιου, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα θετικό ακέραιο της μορφής:

$2^{1+2\alpha} \cdot 3^{2\beta} \cdot 11^{2\gamma} \cdot K^2$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ακέραιοι, $K$ θετικός ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$ γίνεται τέλειος κύβος ακέραιου, όταν πολλαπλασιαστεί με ένα θετικό ακέραιο της μορφής:

$2^{2+3\delta} \cdot 3^{2+3\varepsilon} \cdot 5^{2+3\zeta} \cdot \Lambda^3$, όπου $\delta, \varepsilon, \zeta \geq 0$ ακέραιοι, $\Lambda$ θετικός ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας 11 δεν υπάρχει στον αριθμό 810, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\gamma = 0$. Επίσης ο παράγοντας 5 δεν υπάρχει στον αριθμό 2178, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\zeta = 0$, οπότε θα πάρουμε $K^2 = 5^2$ που είναι τέλειο τετράγωνο.

Για την εύρεση του ελάχιστου θετικού ακέραιου $\nu$ που ικανοποιεί και τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε και τις ελάχιστες δυνατές τιμές των συντελεστών $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ για τις οποίες ισχύουν οι ισότητες

$$1 + 2\alpha = 2 + 3\delta, 2\beta = 2 + 3\varepsilon.$$

Αυτές είναι οι: $\alpha = 2, \delta = 1$ και $\beta = 1, \varepsilon = 0$. Έτσι τελικά προκύπτει:

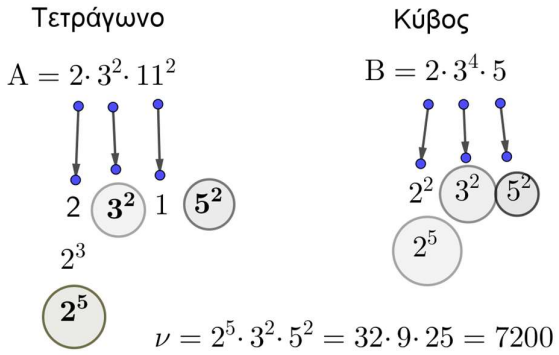
$$\nu = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200.$$

Πράγματι, τότε έχουμε:

$$2178 \cdot \nu = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11)^2$$

$$810 \cdot \nu = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5)^3$$

Εναλλακτικά, για τον προσδιορισμό της ελάχιστης δυνατής τιμής του θετικού ακέραιου $\nu$, μπορούμε να εργαστούμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




**Πρόβλημα 3**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $A\hat{\Gamma}B = 60^o$. Το σημείο Δ της πλευράς ΒΓ είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma = 2\omega$ και $AB = A\Delta$.

Για το σημείο Ε της ευθείας ΑΔ ισχύει ότι: $AE = A\Gamma$.

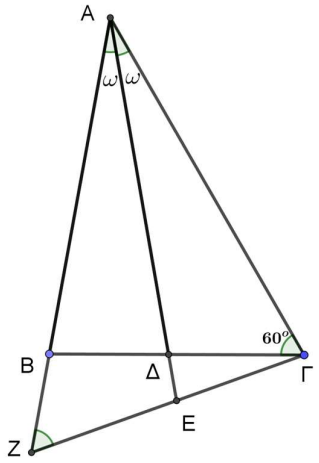
Οι ευθείες ΑΒ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ζ.

**(α)** Να βρείτε το μέτρο των γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma$ του τριγώνου ΑΒΓ.

**(β)** Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

**(γ)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{Z}\Gamma$.

***Σημείωση.*** *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο γραπτό σας.*




Σχήμα 2

**Λύση**

**(α)** Επειδή $AB = A\Delta$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B} = A\hat{\Delta}B. \qquad (1)$$

Όμως η γωνία $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, οπότε

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 60^o + \omega. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 60^o + \omega$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow 2\omega + \omega + 60^o + 60^o = 180^o \Rightarrow 3\omega = 60^0 \Rightarrow \omega = 20^0$$

Άρα είναι: $\hat{\text{Α}} = 2\omega = 2 \cdot 20^o = 40^o$ και $\hat{\text{Β}} = 60^o + \omega = 60^o + 20^o = 80^o$.

**(β)** Επειδή $\text{ΑΕ} = \text{ΑΓ}$ το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} = \frac{180^o - \omega}{2} = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^o.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma = \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{\text{Β}} = 80^o,$$

οπότε έχουμε $\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = 80^o$.
Επομένως το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με $\Gamma\Delta = \Gamma\text{Ε}$.

**(γ)** Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = 80^o$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΕ, οπότε έχουμε:

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} + \omega \Rightarrow 80^o = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} + 20^o \Rightarrow \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\Gamma = 80^o - 20^o = 60^o.$$

**Πρόβλημα 4**

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta \quad \text{και} \quad B = \overline{\beta\gamma\delta} = 100\beta + 10\gamma + \delta,$$

με $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma, \delta$ ψηφία. Αν ισχύει $A - 5B = 1260$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

**Λύση**

$$A - 5B = 1260 \Leftrightarrow 1000\alpha + B - 5B = 1260$$
$$\Leftrightarrow 1000\alpha = 1260 + 4\text{Β}.$$

Επειδή ο θετικός ακέραιος Β είναι τριψήφιος, θα είναι $100 \leq B \leq 999$, οπότε:

$$1660 \leq 1000\alpha = 1260 + 4\text{Β} \leq 1260 + 4 \cdot 999 = 5256$$
$$\Leftrightarrow \alpha \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

- Αν $\alpha = 2$, τότε $2000 = 1260 + 4 \cdot \overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta} = 185$ και $A = 2185$.
- Αν $\alpha = 3$, τότε $3000 = 1260 + 4 \cdot \overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta} = 435$ και $A = 3435$.
- Αν $\alpha = 4$, τότε $4000 = 1260 + 4 \cdot \overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta} = 685$ και $A = 4685$.
- Αν $\alpha = 5$, τότε $5000 = 1260 + 4 \cdot \overline{\beta\gamma\delta} \Leftrightarrow \overline{\beta\gamma\delta} = 935$ και $A = 5935$.

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών θετικών ακεραίων των οποίων το άθροισμα είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

### Λύση (1ος τρόπος)

Έστω ότι οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι $\nu-2, \nu-1, \nu, \nu+1, \nu+2,$ με $\nu \geq 3$ είναι τέτοιοι ώστε

$$(\nu-2)+(\nu-1)+\nu+(\nu+1)+(\nu+2)=\alpha^2 \Leftrightarrow 5\nu=\alpha^2,$$

όπου $\alpha$ θετικός ακέραιος.
Παρατηρούμε ότι, αν πάρουμε $\nu=5\kappa^2, \kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε έχουμε:

$$5\nu=5\cdot 5\kappa^2=(5\kappa)^2, \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών ακέραιων των οποίων το άθροισμα των στοιχείων τους είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

### (2ος τρόπος).

Έστω ότι οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι $\nu, \nu+1, \nu+2,$ $\nu+3, \nu+4$ με $\nu \geq 1$ είναι τέτοιοι ώστε

$$\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)+(\nu+4)=\alpha^2 \Leftrightarrow 5\nu+15=\alpha^2 \Leftrightarrow 5(\nu+3)=\alpha^2,$$

όπου $\alpha$ θετικός ακέραιος.
Παρατηρούμε ότι, αν πάρουμε $\nu+3=5\kappa^2, \kappa \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \nu=5\kappa^2-3, \kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε έχουμε:

$$5(\nu+3)=5\cdot 5\kappa^2=(5\kappa)^2, \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως, υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών ακέραιων των οποίων το άθροισμα των στοιχείων τους είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

### Πρόβλημα 2

Οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $0<\alpha<\beta$. Να βρεθούν όλες οι δυνατές εξισώσεις δευτέρου βαθμού με άγνωστο το $x$, οι οποίες έχουν ρίζες

$$\rho_1=\alpha^2+\alpha\beta,\ \rho_2=\alpha\beta+\beta^2,$$

των οποίων το γινόμενο $\rho_1\rho_2$ είναι ίσο με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\rho_1+\rho_2$.

### Λύση

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι

$$\rho_1+\rho_2=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι

$$\rho_1\rho_2=(\alpha^2+\alpha\beta)(\alpha\beta+\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)^2.$$

Από την υπόθεση πρέπει να ισχύει:

$$\rho_1\rho_2=8(\rho_1+\rho_2) \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2=8(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta=8,$$

αφού $(\alpha+\beta)^2 \neq 0$.
Επειδή οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $0<\alpha<\beta$, από την εξίσωση $\alpha\beta=8$ προκύπτουν τα ζεύγη $(\alpha,\beta)=(1,8)$ και $(\alpha,\beta)=(2,4)$.

- Αν $(\alpha,\beta)=(1,8)$ έχουμε $\rho_1+\rho_2=81, \rho_1\rho_2=648$ και η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$x^2 - 81x + 648 = 0.$$

- Αν $(\alpha, \beta) = (2, 4)$ έχουμε $\rho_1 + \rho_2 = 36, \rho_1\rho_2 = 288$ και η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$x^2 - 36x + 288 = 0.$$

**Πρόβλημα 3**

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ σε δέκα υποσύνολα με τρία στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων.

**Σημείωση.** *Στη διαμέριση του συνόλου Α πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.*

**Λύση**

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο Α σε δέκα υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ένα από αυτά τα υποσύνολα με $\alpha = \beta + \gamma$. Τότε θα είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha = \text{άρτιος.} \qquad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των δέκα υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου Α, θα είναι αριθμός άρτιος.
Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του Α είναι:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31 = 465,$$

περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha$. Έστω Ε το μέσο της πλευράς ΓΔ. Η κάθετη ευθεία από την κορυφή Δ προς την ευθεία ΑΕ την τέμνει στο σημείο Ζ και τέμνει επίσης την διαγώνιο ΑΓ στο σημείο Η και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι:
**(α)** $\text{ΑΕ} = \Delta\Theta$
**(β)** $\Delta\hat{\text{Ε}}\text{Α} = \Gamma\hat{\text{Ε}}\text{Η}$.
**(γ)** Τα σημεία Β, Η και Ε είναι συνευθειακά.

**Λύση**

**(α)** Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΔΘ είναι ορθογώνια, αφού $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε} = 90^{\text{o}} = \Delta\hat{\Gamma}\Theta$, και έχουν:

$$\text{Ε}\hat{\text{Α}}\Delta = 90^{\text{o}} - \text{Α}\hat{\text{Ε}}\Delta = \text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ} = \Gamma\hat{\Delta}\Theta \text{ και } \text{ΑΔ} = \Gamma\Delta = \alpha.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΔΘ είναι ίσα, (σχήμα 3), οπότε θα έχουν και

$$\text{ΑΕ} = \Delta\Theta.$$

**(β)** Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΔΘ έχουμε ότι:

$$\Gamma\Theta = \Delta\text{Ε} = \frac{\alpha}{2} = \Gamma\text{Ε} \qquad (1)$$

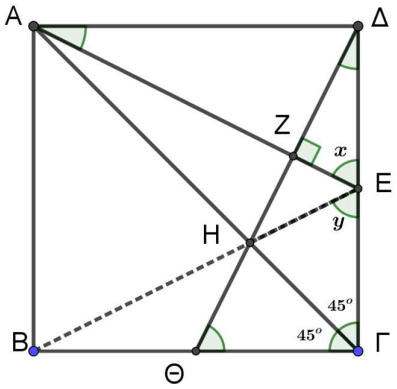
$$\Delta\hat{\text{Ε}}\text{Α} = \Gamma\hat{\Theta}\Delta \qquad (2)$$

Τότε τα τρίγωνα ΓΗΕ και ΓΗΘ έχουν την πλευρά ΓΗ κοινή, $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Η} = 45^{\text{o}} = \text{Η}\hat{\Gamma}\Theta$ (αφού ΑΓ διχοτόμος της γωνίας $\text{Β}\hat{\Gamma}\Delta$ ) και $\Gamma\text{Ε} = \Gamma\Theta$, λόγω της (1).

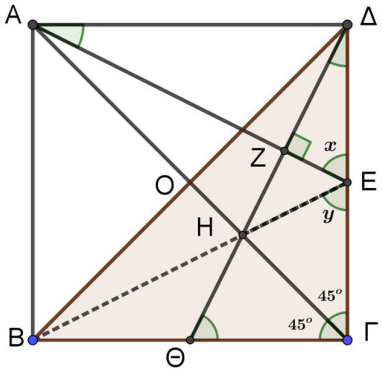
Άρα τα τρίγωνα ΓΗΕ και ΓΗΘ είναι ίσα (κριτήριο Π-Γ-Π), οπότε θα έχουν και

$$\Gamma\hat{E}H = \Gamma\hat{\Theta}H = \Gamma\hat{\Theta}\Delta. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι: $\Delta\hat{E}A = \Gamma\hat{E}H$.




Σχήμα 3




Σχήμα 4

**(γ)** Τα τρίγωνα ΓΔΘ και ΓΒΕ είναι ορθογώνια και επιπλέον έχουν

$$\Gamma\Delta = \Gamma B = \alpha \text{ και } \Gamma\Theta = \Gamma E = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα τα τρίγωνα ΓΔΘ και ΓΒΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\Gamma\hat{E}B = \Gamma\hat{\Theta}\Delta \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι $\Gamma\hat{E}B = \Gamma\hat{E}H$, οπότε τα σημεία Β, Η και Ε είναι συνευθειακά.

**(γ) (2ος τρόπος)** Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΑΔΕ και ΓΔΘ του ερωτήματος (α) είναι $\Theta\Gamma = \frac{\alpha}{2} = B\Theta$, οπότε το Θ είναι το μέσο του ΒΓ. Αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, τότε το σημείο Η είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΓΟ και ΔΘ του τριγώνου ΒΔΓ, δηλαδή είναι το βαρύκεντρο του ΒΔΓ, το οποίο είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΓΟ και ΒΕ, οπότε και η διάμεσος ΒΕ περνάει από το Η, σχήμα 4.
Συνεπώς, τα σημεία Β, Η, και Ε είναι συνευθειακά.

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ}$ και γωνία $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60^o$. Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ και είναι τέτοιο ώστε η ΑΔ να είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma = 2\omega$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ}$. Στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το μέρος του Δ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε $\text{ΑΕ} = \text{ΑΓ}$. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ παίρνουμε σημείο Ι έτσι ώστε $\text{ΕΙ} = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

**(α)** το Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ,

**(β)** το τρίγωνο ΒΙΕ είναι ισόπλευρο.

### Λύση

**(α)** Επειδή $\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ}$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\hat{\text{Β}} = \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}. \qquad (1)$$

Όμως η γωνία $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, οπότε

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 60^o + \omega. \qquad (2)$$

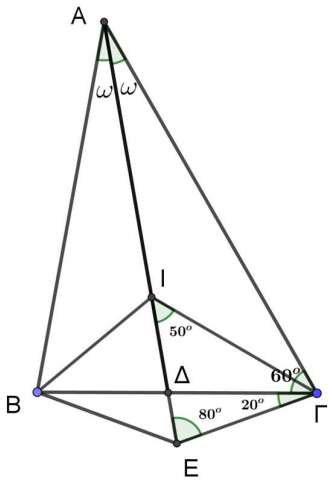
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 60^o + \omega,$$

οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow 2\omega + \omega + 60^o + 60^o = 180^o$$

$$\Rightarrow 3\omega = 60^0 \Rightarrow \omega = 20^0.$$



Σχήμα 5

Άρα είναι:

$$\hat{\text{Α}} = 2\omega = 2 \cdot 20^o = 40^o \quad \text{και} \quad \hat{\text{Β}} = 60^o + \omega = 60^o + 20^o = 80^o.$$

Επειδή $\text{ΑΕ} = \text{ΑΓ}$ το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} = \frac{180^o - \omega}{2} = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^o.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma = \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{\text{Β}} = 80^o,$$

οπότε έχουμε $\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = 80^o$.

Επομένως το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με $\Gamma\Delta = \Gamma\text{Ε}$. Επειδή $\text{ΕΙ} = \Gamma\Delta$, έπεται ότι $\Gamma\text{Ε} = \text{ΕΙ}$, οπότε το τρίγωνο ΓΕΙ είναι ισοσκελές με

$$\text{Ε}\hat{\text{Ι}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Ι} = \frac{180^o - \text{Ι}\hat{\text{Ε}}\Gamma}{2} = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o.$$

Επομένως, έχουμε

$$\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ι} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} - \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Ι} = 80^o - 50^o = 30^o = \frac{\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}}{2},$$

οπότε και η ευθεία ΓΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}$.

Επομένως, το Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ.

**(β)** Επειδή $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma = 80^o$, το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι εγγράψιμο.

Άρα θα είναι και $\text{BÊI} = \text{BÊA} = \text{BΓ̂A} = 60^o$. Επιπλέον, επειδή η ΒΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{B}}$, έχουμε $\text{AB̂I} = 40^o$, οπότε για τη γωνία ΒΊΕ που είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΙ έχουμε:

$$\text{BÎE} = \text{AB̂I} + \omega = 40^o + 20^o = 60^o.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΙΕ είναι ισόπλευρο.

**2ος τρόπος**

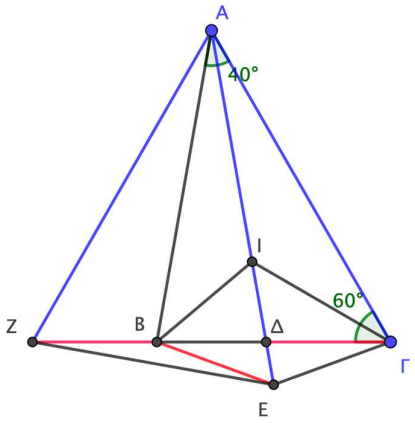
**(β)** Έστω σημείο Ζ στην προέκταση της ΓΒ προς το Β τέτοιο ώστε $\text{AZ} = \text{AΓ} = \text{AE}$. Τότε το τρίγωνο ΑΖΓ είναι ισόπλευρο (ως ισοσκελές με μια γωνία ίση με $60^\circ$), οπότε

$$\text{AẐB} = 60^\circ \text{ και } \text{ZÂB} = 20^\circ.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΕΒΑ είναι ίσα από Π-Γ-Π, και επίσης το τρίγωνο ΖΒΑ είναι ίσο με το ΓΔΑ από ΠΓΠ, οπότε

$$\text{BE} = \text{ZB} = \text{ΓΔ} = \text{EI}$$

Όμως η γωνία $\widehat{\text{BEI}} = \widehat{\text{BZA}} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΙ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 6

**(α)** Είναι $\text{BÎΔ} = 60^\circ$ και $\text{IΔ̂B} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$, ως εξωτερική στο ΑΔΓ, οπότε $\text{IB̂Δ} = 40^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΙΒΔ. Αλλά $\text{AB̂Δ} = 80^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή η ΙΒ διχοτομεί την γωνία ΑΒΓ. Άρα το Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ.

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x, y)$ που είναι λύσεις του συστήματος:

$$|x - 3y| = 2x + y - 20$$

$$|2x + y| = 2x + 5.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$2x + y - 20 = |x - 3y| \geq 0 \Rightarrow 2x + y \geq 20 > 0 \Rightarrow |2x + y| = 2x + y,$$

οπότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$2x + y = 2x + 5 \Leftrightarrow y = 5.$$

Για $y = 5$ η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$|x - 15| = 2x - 15. \qquad (1)$$

Επειδή $2x - 15 = |x - 15| \geq 0$, έχουμε τον περιορισμό $x \geq 7{,}5$. Τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x - 15 = 2x - 15 \text{ ή } x - 15 = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (απορρίπτεται) ή } x = 10.$$

Επομένως, το σύστημα έχει τη λύση: $(x, y) = (10, 5)$.

**Πρόβλημα 3**

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ σε 14 υποσύνολα με τρία στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων.

**Σημείωση.** *Στη διαμέριση του συνόλου Α πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.*

**Λύση**

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο Α σε 14 υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ένα από αυτά τα υποσύνολα με $\alpha = \beta + \gamma$. Τότε θα είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha = \text{άρτιος}. \qquad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των 14 υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου Α, θα είναι αριθμός άρτιος.
Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του Α είναι:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 42 = \frac{42 \cdot 43}{2} = 21 \cdot 43 = 903,$$

περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha + \beta)^3 x + 4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1 = 0,$$

όπου οι παράμετροι $\alpha, \beta$ είναι θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι:
**(i)** Η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες στο $\mathbb{R}$.
**(ii)** Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί, τότε $\alpha = \beta$.

**Λύση**

**(i)** Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) = (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 \\ &= [(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) > 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &\geq 4(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = 4(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $[(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 > 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3$, αφού η ισότητα $[(\alpha + \beta)^3]^2 + 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta)^3$, ισχύει μόνον όταν $(\alpha + \beta)^3 = 2$, που είναι αδύνατο.
Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha + \beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1) > (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &\geq 16\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16\alpha\beta(\alpha + \beta)[\alpha\beta(\alpha + \beta) - 1] > 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)^6 = (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta)^2 \geq 2\alpha\beta \cdot 2\alpha\beta \cdot (\alpha + \beta)^2 = 16\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2.$$

**(ii)** Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί, τότε η διακρίνουσα της πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού. Επειδή η διακρίνουσα

$$\Delta = (\alpha+\beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha+\beta)-1)$$

είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι

$$\Delta = (\alpha+\beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha+\beta)-1) = \kappa^2, \text{ όπου } \kappa \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Επομένως, θα είναι

$$(\alpha+\beta)^6 - \kappa^2 = 4(4\alpha\beta(\alpha+\beta)-1) > 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)^6 > \kappa^2 \Rightarrow \kappa < (\alpha+\beta)^3.$$

Επειδή $4(4\alpha\beta(\alpha+\beta)-1)$ άρτιος ακέραιος, έπεται ότι οι ακέραιοι $(\alpha+\beta)^6,\ \kappa^2$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι ή είτε και οι δύο περιττοί, οπότε θα είναι:

$$\begin{gathered}\kappa \le (\alpha+\beta)^3 - 2 \Rightarrow \kappa^2 \le [(\alpha+\beta)^3 - 2]^2 \\ \Rightarrow (\alpha+\beta)^6 - 4(4\alpha\beta(\alpha+\beta)-1) \le [(\alpha+\beta)^3 - 2]^2 \\ \Rightarrow (\alpha+\beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha+\beta) + 4 \le (\alpha+\beta)^6 - 4(\alpha+\beta)^3 + 4 \\ \Rightarrow -16\alpha\beta(\alpha+\beta) \le -4(\alpha+\beta)^3 \Rightarrow 4\alpha\beta(\alpha+\beta) \ge (\alpha+\beta)^3 \\ \Rightarrow 4\alpha\beta \ge (\alpha+\beta)^2 \Rightarrow 0 \ge (\alpha-\beta)^2 \le 0 \Rightarrow \alpha = \beta.\end{gathered}$$

**2ος τρόπος**

**(i)** Έστω $S = \alpha+\beta,\ P = \alpha\beta$. Είναι

$$\Delta = (\alpha+\beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha+\beta) + 4 = S^6 - 16PS + 4$$

Με συμπλήρωση τετραγώνου παίρνουμε

$$\begin{gathered}\Delta = (S^6 - 4S^3 + 4) + 4S^3 - 16PS = (S^3-2)^2 + 4S(S^2 - 4P) \\ = (S^3-2)^2 + 4S(\alpha-\beta)^2 \ge (S^3-2)^2 > 0,\end{gathered}$$

αφού $S^3 > 2$, και $(\alpha-\beta)^2 \ge 0$.

**(ii)** Όπως στον πρώτο τρόπο βρίσκουμε ότι πρέπει $\Delta = \kappa^2$ με $\kappa^2 \le (S^3-2)^2$, οπότε από την ανισότητα του (i) παίρνουμε

$$\Delta = (S^3-2)^2 \Leftrightarrow 4S(\alpha-\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

## Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών $(x, y, z)$ που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις:

$$\frac{12x^2}{4+9x^2} = y,\ \ \frac{12y^2}{4+9y^2} = z,\ \ \frac{12z^2}{4+9z^2} = x.$$

**Λύση**

Από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι: $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Αν είναι $x = 0$ ή $y = 0$ ή $z = 0$, τότε από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι $x = y = z = 0$, οπότε έχουμε τη λύση: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Υποθέτουμε ότι: $xyz \ne 0$. Επειδή

$$4 + 9x^2 = 2^2 + (3x)^2 \ge 2 \cdot 2 \cdot 3x = 12x,$$

έχουμε:

$$y = \frac{12x^2}{4+9x^2} \le \frac{12x^2}{12x} = x. \qquad (1)$$

Ομοίως, λαμβάνουμε:

$$z = \frac{12y^2}{4+9y^2} \le \frac{12y^2}{12y} = y. \qquad (2)$$

$$x = \frac{12z^2}{4+9z^2} \le \frac{12x^2}{12x} = z. \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$y \le x \le z \le y \Rightarrow x = y = z,$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{12x^2}{4+9x^2} = x \Leftrightarrow x(4+9x^2) = 12x^2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x(4-12x+9x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 4-12x+9x^2 = 0\ \Leftrightarrow\ (2-3x)^2 = 0 \Leftrightarrow\ x = \frac{2}{3},$$

οπότε βρίσκουμε τη λύση $(x,y,z) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι:

$$(x,y,z) = (0,0,0) \text{ και } (x,y,z) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

**Πρόβλημα 2**

Να εξετάσετε αν μπορούμε να διαμερίσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{1,2,3,\dots,2025\}$ σε 405 υποσύνολα με πέντε στοιχεία το καθένα, που να είναι τέτοια ώστε ένα στοιχείο τους να ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων άλλων.

**Σημείωση.** *Στη διαμέριση του συνόλου Α πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα τα στοιχεία του μία φορά το καθένα.*

**Λύση**

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο Α σε 675 υποσύνολα, όπως ζητείται. Έστω $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ ένα από αυτά τα υποσύνολα με $\alpha = \beta+\gamma+\delta+\varepsilon$. Τότε θα είναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 2\alpha = \text{άρτιος}. \qquad (1)$$

Επειδή το ίδιο ισχύει για όλα τα υποσύνολα, το άθροισμα των στοιχείων των 405 υποσυνόλων, δηλαδή των στοιχείων του συνόλου Α, θα είναι αριθμός άρτιος.
Όμως, το άθροισμα των στοιχείων του Α είναι:

$$1+2+3+\cdots+2025 = \frac{2025\cdot 2026}{2} = 2025\cdot 1013,$$

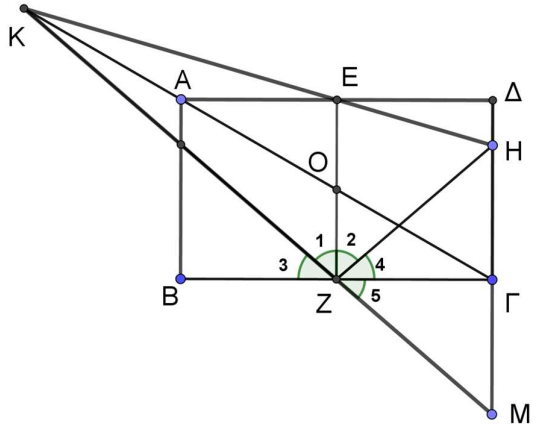
δηλαδή είναι περιττός αριθμός, το οποίο αντίκειται στη σχέση (1). Άρα δεν είναι δυνατό να γίνει η διαμέριση που ζητείται.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB < B\Gamma$. Έστω Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ, αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Η στην πλευρά ΓΔ διαφορετικό από τα Γ και Δ έτσι ώστε $\Gamma H > H\Delta$. Αν οι ευθείες ΗΕ και ΓΑ τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΕΖ διχοτομεί τη γωνία $K\hat{Z}H$.

**Λύση**

Επειδή $\text{B}\hat{\text{Z}}\text{E} = 90^{\text{o}} = \Gamma\hat{\text{Z}}\text{E} \Leftrightarrow \hat{\text{Z}}_3 + \hat{\text{Z}}_1 = \hat{\text{Z}}_4 + \hat{\text{Z}}_2$, (δες σχήμα 7), αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{\text{Z}}_3$ και $\hat{\text{Z}}_4$ είναι ίσες, γιατί τότε από την προηγούμενη ισότητα θα είναι και $\hat{\text{Z}}_1 = \hat{\text{Z}}_2$.




Σχήμα 7

Έστω ότι οι ευθείες ΚΖ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Μ. Τότε θα είναι

$$\hat{\text{Z}}_3 = \hat{\text{Z}}_5, \text{ (ως κατά κορυφή)} \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο ΖΗΜ το τμήμα ΖΓ είναι ύψος, αφού $\text{Z}\hat{\Gamma}\text{H} = 90^{\text{o}}$.
Επιπλέον, από τα όμοια τρίγωνα ΚΕΟ~ΚΗΓ, ΚΟΖ~ΚΓΜ και ΚΕΖ~ΚΗΜ, προκύπτουν οι ισότητες

$$\frac{\text{EO}}{\text{H}\Gamma} = \frac{\text{KE}}{\text{KH}} = \frac{\text{KO}}{\text{K}\Gamma} = \frac{\text{OZ}}{\Gamma\text{M}} \Rightarrow \frac{\text{EO}}{\text{H}\Gamma} = \frac{\text{OZ}}{\Gamma\text{M}} \overset{\text{EO=OZ}}{\Rightarrow} \text{H}\Gamma = \Gamma\text{M}.$$

Επομένως, στο τρίγωνο ΗΖΜ η ΖΓ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\text{H}\hat{\text{Z}}\text{M}$, δηλαδή έχουμε την ισότητα των γωνιών

$$\hat{\text{Z}}_4 = \hat{\text{Z}}_5. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι: $\hat{\text{Z}}_3 = \hat{\text{Z}}_4$.

**2ος τρόπος**

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με $\Gamma(0,0)$, $\Delta(0,2)$ (όπου έχουμε υποθέσει ότι $\Gamma\Delta = 2$ χωρίς βλάβη της γενικότητας). Επιπλέον, έστω

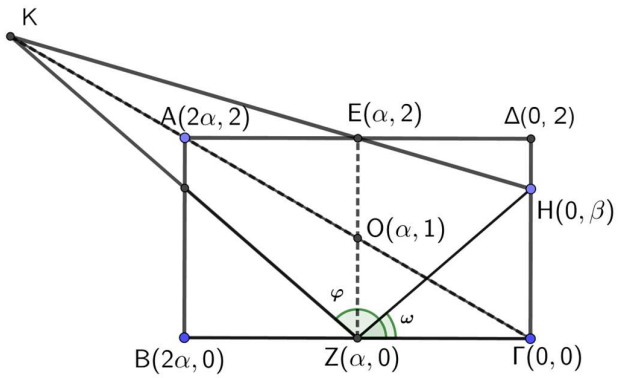
$\text{E}(\alpha, 2), \text{B}(2\alpha, 0), \text{A}(2\alpha, 2)$ $\text{Z}(\alpha, 0)$, $\text{O}(\alpha, 1), \text{H}(0, \beta)$, με $\alpha < 0, 1 < \beta < 2$, αφού $\Gamma\text{H} > \text{H}\Delta$.

Η ευθεία ΖΗ έχει κλίση $\lambda_{\text{ZH}} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Αφού τα σημεία Z, O ανήκουν στην κατακόρυφη ευθεία ΖΕ με εξίσωση $x = \alpha$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_{\text{ZK}} = \frac{\beta}{\alpha}$, αφού τότε οι ευθείες ΖΚ και ΖΗ θα είναι συμμετρικές ως προς την ΖΕ και το συμπέρασμα έπεται.
Πράγματι, η ευθεία ΓΟ έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{\alpha}x \qquad (*)$$

Η ευθεία ΗΕ έχει κλίση $\lambda_{\text{HE}} = \frac{2-\beta}{\alpha}$ και σημείο τομής με τον $y'y$ το $\text{H}(0, \beta)$, άρα έχει εξίσωση

$$y = \frac{2-\beta}{\alpha}x + \beta \qquad (**)$$




Σχήμα 8

Λύνοντας το σύστημα των (*), (**), εύκολα βρίσκουμε ότι το Κ, ως σημείο τομής των ευθειών ΗΕ και ΓΟ, έχει

$$x_{\mathrm{K}} = \frac{\alpha\beta}{\beta-1} \qquad \text{και} \qquad y_{\mathrm{K}} = \frac{\beta}{\beta-1}$$

Τότε

$$\lambda_{\mathrm{ZK}} = \frac{\frac{\beta}{\beta-1}}{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}-1} = \frac{\beta}{\alpha},$$

όπως θέλαμε.

**Πρόβλημα 4**

Να προσδιορίσετε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x, y)$ που είναι λύσεις του συστήματος:

$$|x-3y| = 2x+y-a$$
$$|2x+y| = 2x+b,$$

όπου $a \geq 0, b \geq 0$ πραγματικές παράμετροι.

**Λύση**

Έχουμε

$$2x+y-a = |x-3y| \geq 0 \Rightarrow 2x+y \geq a \geq 0 \Rightarrow |2x+y| = 2x+y,$$

οπότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$2x+y = 2x+b \Leftrightarrow y = b.$$

Για $y = b$ η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$|x-3b| = 2x+b-a. \qquad (1)$$

Επειδή $2x+b-a = |x-3b| \geq 0$, έχουμε τον περιορισμό

$$2x \geq a-b \Leftrightarrow x \geq \frac{a-b}{2}. \qquad (2)$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x-3b = 2x+b-a \ \text{ ή } \ x-3b = -2x-b+a$$

$$\Leftrightarrow x = a - 4b \quad \text{ή} \quad 3x = a + 2b$$
$$\Leftrightarrow x = a - 4b \quad \text{ή} \quad x = \frac{a + 2b}{3}.$$

Η λύση $x = a - 4b$ είναι δεκτή, αν ικανοποιεί τον περιορισμό

$$a - 4b \geq \frac{a - b}{2} \Leftrightarrow 2a - 8b \geq a - b \Leftrightarrow a \geq 7b.$$

Άρα για $a \geq 7b$ το σύστημα έχει τη λύση: $(x, y) = (a - 4b, b)$.

Η λύση $x = \frac{a+2b}{3}$ είναι δεκτή, αν ικανοποιεί τον περιορισμό

$$\frac{a + 2b}{3} \geq \frac{a - b}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b \geq 3a - 3b \Leftrightarrow a \leq 7b.$$

Άρα για $a \leq 7b$ το σύστημα έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{a+2b}{3}, b\right)$.